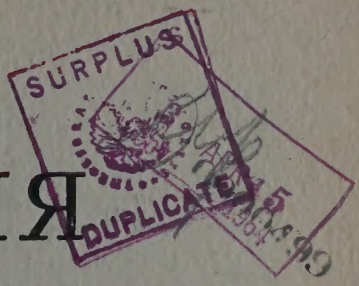
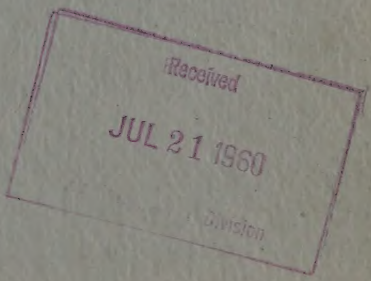
АКАДЕМИЯ НАУК СССР



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ V
ВЫПУСК
2



1960
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том V *Выпуск 2*
1960

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В***

СОДЕРЖАНИЕ

Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I. 137

Borovkov A. A. Limit Theorems on the Distributions of Maximum of Sums of Bounded Latticed Random Variables. I. 171

Стратонович Р. Л. Условные процессы Маркова 172

Stratonovich R. L. Conditional Markov Processes 195

Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений . 196

Hasminsky R. Z. Ergodic Properties of Recurrent Diffusion Processes and Stabilization of the Solution to the Cauchy Problem for Parabolic Equations 214

Колмогоров А. Н., Сарманов О. В. О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей (к восьмидесятилетию со дня рождения) 215

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса 222

Kolmogorov A. N., Rozanov Yu. A. On a Strong Mixing Condition for Stationary Random Gaussian Process 227

Лян Чжи-шуэн. Об условных марковских процессах 227

C. S. Leung. On Conditional Markov Processes 228

Черкасов И. Д. Признак однородности по координатам непрерывного процесса Маркова 229

Cherkasov I. D. Criteria for Coordinate Homogeneity for Continuous Markov Process 237

Юшкевич А. А. К определению строго марковского процесса 237

Yushkevic A. A. On the Definition of a Strong Markov Process 243

Розанов Ю. А. О центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций 243

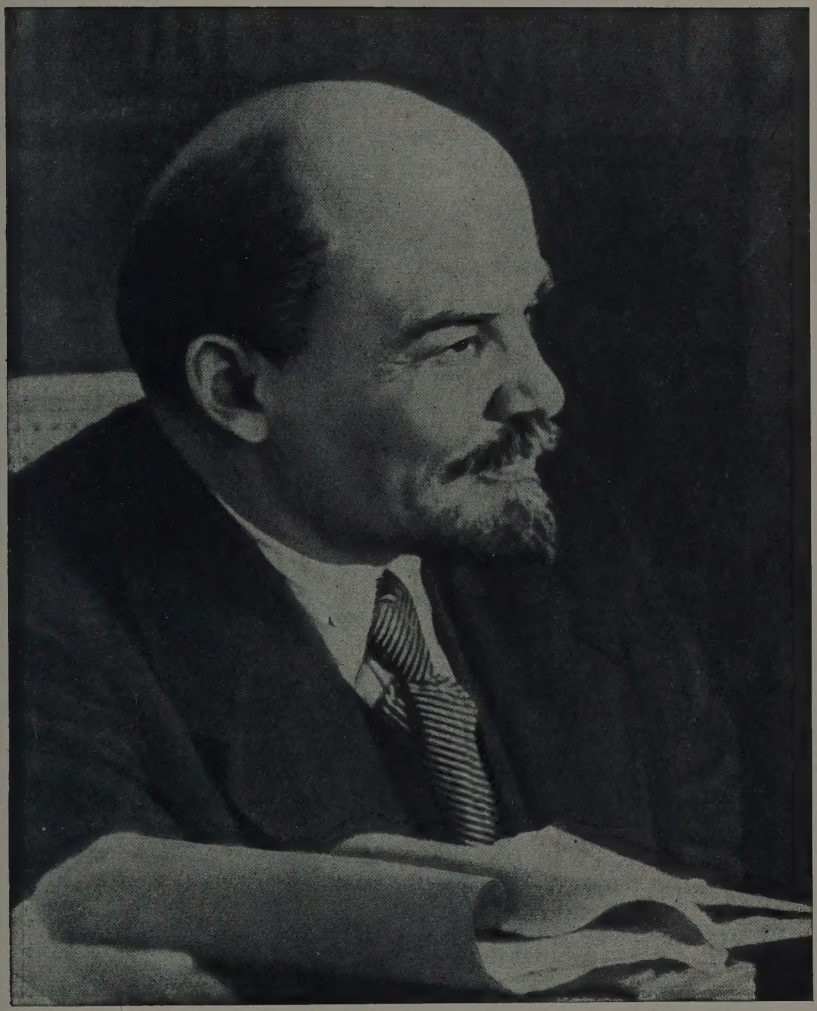
Rozanov Yu. A. A. Central Limit Theorem for Additive Random Functions . . 246

Башарин Г. П. О предельном распределении времени занятости полнодоступного пучка линий 246

Basharin G. P. The Congestion Time Limit Distribution for a Fully Available Group of Trunks 252

Информация о совещании по предельным теоремам теории вероятностей . . 253

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В-9-14-03



В. И. ЛЕНИН

К 90-летию со дня рождения

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том V И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1960

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА СУММ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. I.

А. А. БОРОВКОВ

Введение

Пусть $\xi_1\xi_2\ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Обозначим:

$$\mathbf{M}\xi_k = a,\ \mathbf{D}\xi_k = \sigma^2,\ s_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ \overline{s}_n = \max_{0\leqslant v\leqslant n} s_v\ (s_0 = 0).$$

В математической статистике часто требуется знать распределение случайной величины $\overline{s}_n$ или функций от нее и особенно асимптотическое поведение вероятности

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n < x) \tag{1}$$

при $n\to\infty$, где $x>0$ может расти вместе с n или оставаться постоянным. Относительно предельного поведения вероятности (1) известно следующее (см. [1] — [3]). Если $\mathbf{M}|\xi_k|^3<\infty$ и $u = \dfrac{x-an}{\sigma\sqrt{n}}$ не зависит от n, то

$$1.\ \text{при } a=0 \qquad \mathbf{P}(\overline{s}_n < u\sigma\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u e^{-u^2/2}du + O(n^{-1/2}\ln^2 n) \tag{2}$$

$$2.\ \text{при } a>0 \qquad \mathbf{P}(\overline{s}_n < an + u\sigma\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2}du + O(n^{-1/26}\ln n)$$

Приведенные оценки порядка малости остаточных членов безусловно не являются точными. Поэтому первой возникающей здесь задачей является отыскание (особенно в случае $a=0$) асимптотических разложений. С этой целью пока рассматривалась только схема Бернулли (см. работу В. С. Королюка [4]). С другой стороны, если x таково, что $|u|$ неограниченно возрастает вместе с n или стремится к 0 при $a=0$ *, то приведенные результаты дают только, что

$$\mathbf{P}(\overline{s}_n < x)\to 1 \text{ при } \frac{x-an}{\sqrt{n}}\to+\infty$$

---

* В таких случаях принято говорить, что неравенства $\overline{s}_n > x$ или $\overline{s}_n \leqslant x$ определяют области больших уклонений $\overline{s}_n$. При $a=0$ и $x=o(\sqrt{n})$ область $\overline{s}_n < x$ естественнее называть областью малых уклонений $\overline{s}_n$.

и

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n < x) \to 0 \text{ при } \begin{cases} \dfrac{x - an}{\sqrt{n}} \to -\infty, & \text{если } a > 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{n}} \to 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

При таких x и $n \to \infty$ предметами изучения становятся скорость сходимости вероятности $\mathbf{P}(\bar{s}_n < x)$ к 1 или 0 и, как и прежде, отыскание асимптотических разложений (включая случай $a < 0$). Эти вопросы, а также ряд других задач, связанных с большими уклонениями $\bar{s}_n$ изучены мало. Для больших уклонений исключение составляет опять лишь схема Бернулли (см. так называемые задачи о разорении игрока, изложенные, например, в [5]).

В работах А. Вальда [6], [7] при условии, что $|a|$ и σ малы, указан метод получения приближенной формулы характеристической функции для времени первого прохождения через барьер в однородном случайном блуждании на прямой *. Рассмотрение родственных вопросов для ветвящихся процессов — о распределении числа финальных частиц в момент вырождения процесса — содержится, например, в работе Р. Оттера [8]. Некоторые результаты работы имеют большое сходство с теоремой 1 (глава 2), опубликованной также в заметке автора [9]. Можно указать ряд теорем о распределении $\bar{s}_n$ и его параметрах, имеющих вспомогательный характер (см. [10], [11]). Среди них важное неравенство А. Н. Колмогорова [12]: при $a \geqslant 0$ и $\sigma = 1$ $\mathbf{P}(\bar{s}_n > x) \leqslant 2\mathbf{P}(s_n > x - \sqrt{2n})$, которое вместе с очевидным неравенством $\mathbf{P}(\bar{s}_n > x) \geqslant \mathbf{P}(s_n > x)$ позволяет устанавливать связь вероятностей больших уклонений $\bar{s}_n$ с уже достаточно хорошо изученными вероятностями больших уклонений для s_n ([13] — [15]). Связь между характеристическими функциями $\bar{\Phi}_n(t)$ для $\bar{s}_n$ и $\Phi_n(t)$ для $\max(0, s_n)$ в виде соотношения $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Phi}_n(t) \lambda^n = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \frac{\lambda^n}{n}$ найдена Спицером ([16]).

В настоящей работе изучается распределение $\bar{s}_n$ в предположении, что ξ_k имеют решетчатое ограниченное распределение. Основное содержание работы составляют локальные и интегральные теоремы для времени первого прохождения через барьер (последние совпадают с интегральными теоремами для $\bar{s}_n$). Результаты получены для всего «спектра» значений x — начиная с $x = o(n)$ до x, эквивалентного произведению n на величину максимального скачка. В них содержатся, в частности, ответы на все поставленные выше вопросы.

Основной метод состоит в отыскании производящих функций решений конечно-разностных уравнений с двумя переменными, установлении свойств

* В последующих формулировках часто будет удобно прибегать к схеме случайных блужданий. При этом s_n будет рассматриваться как координата, вышедшей из точки 0, блуждающей на прямой частицы после n случайных скачков $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а целочисленная точка $x > 0$ называться или поглощающим экраном или барьером.

этих функций и использовании метода перевала ([17], [18]) при интегрировании формул обращения.

Работа состоит из трех глав. Глава 1 содержит изучение свойств алгебраической функции, порождаемой характеристическим уравнением, необходимое в дальнейшем. Большая часть главы 2 посвящена отысканию асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$ того, что число η_{1x} скачков частицы до ее поглощения экраном в точке x равно n. Могут быть три возможности (§§ 2 — 4):

1. $x = o(n)$;

2. $x \sim \alpha n,\ 0 < \alpha < m;$ (3)

3. $x \sim mn$ (m — величина максимального скачка).

Каждый из этих трех случаев рассматривался отдельно, что связано с существенно различным поведением производящей функции для $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$ (§ 1) в окрестностях седловых точек. Пусть λ_α — точка действительной полуоси $\lambda > 0$, в которой достигается минимум производящей функции скачка ξ_k — α и ω_α — величина этого минимума. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_{1x} = n) = \begin{cases} c_1(x, n)\dfrac{x\lambda_0^{-x}\omega_0^n e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{n^{3/2}}\left(1 + O\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) & x = o(n) \\ c_2(x, n)\dfrac{\lambda_\alpha^{\alpha n - x}\omega_\alpha^n e^{nH_\alpha\left(\frac{x}{n} - \alpha\right)}}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\dfrac{x}{n} - \alpha\right) + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) & x \sim \alpha n, \\ & 0 < \alpha < m. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь функции $H(t)$ и $H_\alpha(t)$ при достаточно малом $|t|$ разлагаются в ряд по степеням t, начинающийся с квадратичного члена. $c_1(x, n)$ и $c_2(x, n)$ — равномерно ограниченные и, вообще говоря, периодические по x и n функции. Первые члены разложений для $H(t)$ и $H_\alpha(t)$ и явный вид функций $c_1(x, n)$ и $c_2(x, n)$ приведены в теоремах 1, 2.

Наиболее трудоемким и интересным оказывается вычисление $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$, когда $x \sim mn$. Главный член в $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$ в этом случае начинает зависеть от большого количества новых обстоятельств и результат становится менее обозримым. Значение $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$ для $x \sim mn$ приведено в теореме 3. Глава 2 содержит также ряд дополнений. В п. п. 1 — 2 § 5 найдены, в частности, выражения для первых моментов времени поглощения при условии, что поглощение когда-либо состоится (т. е. и для случая $a < 0$), и условное распределение величины первого перескока через x при том же условии. Производящая функция предельного (при $x \to \infty$) распределения первого перескока оказывается делителем характеристического многочлена. В п. 4 § 5 рассмотрен пример получения производящей функции вероятностей $\mathbf{P}(\eta_{1x} = n)$ с помощью метода запретных индексов.

Глава 3 целиком посвящена интегральным теоремам для $\bar{s}_n$, § 1 содержит модификацию метода перевала для определенного вида интегралов, у которых подынтегральная функция имеет полюс, неограниченно приближающийся к седловой точке. В §§ 3 — 5 производится интегрирование производящей функции для $\mathbf{P}(\bar{s}_n < x)$, при этом в той же последовательности, что и

прежде, просматриваются все возможности (3) роста x при $n\to\infty$. Приведем основные результаты §§ 3 — 4 для случая $a=0$:

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n<x)=\begin{cases} c(x)\dfrac{x}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) & x \text{ не зависит от } n \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-u^2/2}\,du\left(1+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & x\to\infty,\quad x=O(\sqrt{n}). \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n\geqslant x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du\left(1+O\left(\dfrac{x^3}{n^2}\right)\right) & \dfrac{\sqrt{n}}{x}=O(1),\ x=o(n^{2/3}), \\ \dfrac{\sigma\sqrt{2n}}{x\sqrt{\pi}}\,e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}\left(1+O\left(\dfrac{n}{x^2}\right)+O\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) & \dfrac{x}{\sqrt{n}}\to\infty,\ x=o(n), \\ c_3(x,n)\dfrac{\lambda_\alpha^{\alpha n-x}\omega_\alpha^n e^{nH_\alpha\left(\frac{x}{n}-\alpha\right)}}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\dfrac{x}{n}-\alpha\right)+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) & x\sim\alpha n, \\ & 0<\alpha<m. \end{cases}$$

В этих формулах $H(t)$, $H_\alpha(t)$ имеют тот же смысл, что и в (4); $c_3(x,n)$ обладает свойствами функции $c_2(x,n)$ и $c(x)$ — функция при больших x равная $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}+O\left(\frac{1}{x}\right)$. Явный вид $c_3(x,n)$ и $c(x)$ можно найти в теоремах 4, 5. При $x\sim c\sqrt{n}$, $c=\text{const}$ вероятность $\mathbf{P}(\bar{s}_n<x)$ имеет асимптотическое разложение по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ с коэффициентом при $\frac{1}{\sqrt{n}}$ зависящим только от второго и третьего моментов ξ_k и от математического ожидания предельной величины первого перескока.

Результаты для случая $a>0$ содержатся в теоремах 4 — 6. При $a<0$ наблюдается полная аналогия случаям $a>0$ и $a=0$. Именно, если $a\geqslant 0$, то имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\mathbf{P}(\bar{s}_n\geqslant x)}{n}=\begin{cases}0 & \alpha\leqslant a\\ \log\omega_\alpha & \alpha\geqslant a,\end{cases}$$

а поведение $\mathbf{P}(\bar{s}_n\geqslant x)$ на переходном участке $\alpha=0$ описывается нормальным законом и формулами (34.3). Оказывается, при $a<0$ также определена некоторая функция $a_\xi\geqslant 0$ от распределения вероятностей скачка ξ_k, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\mathbf{P}(\bar{s}_n\geqslant x)}{n}=\begin{cases}-\alpha\log\mu & \alpha\leqslant a_\xi\\ \log\omega_\alpha & \alpha\geqslant a_\xi\end{cases}\qquad(5)$$

где $a_\xi=\mu\omega'(\mu)$, $\omega(\lambda)$ — производящая функция скачка и μ — наибольший положительный корень уравнения $\omega(\lambda)-1=0$. При $a\geqslant 0$ имеем: $\mu=1$ и $a_\xi=a$, так что равенство (5) является общим. При $\alpha=a_\xi$ $(a<0)$ вероятность $\mathbf{P}(\bar{s}_n\geqslant x)$ также описывается нормальным законом (в качестве множи-

теля) и формулами, подобными (34.3) (см. теоремы 4 — 5)*. Значение $\mathbf{P}(\overline{s}_n \geqslant x)$, когда $x \sim mn$, приведено в теоремах 6а, 6б.

В целом, изложенными в работе методами можно рассматривать широкий круг вопросов, связанных с распределением $\overline{s}_n$, распределением величины первого перескока и т. д. Методы теории интегральных уравнений позволят, по-видимому, в ближайшее время при изучении указанных вопросов выйти за рамки класса решетчатых ограниченных распределений**.

Автор выражает глубокую признательность А. Н. Колмогорову и Б. А. Севастьянову за ценные указания и замечания по улучшению настоящей работы.

Глава I. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Случайные величины ξ_k можно считать целочисленными с общим наибольшим делителем возможных значений, равным 1. Обозначим:

$$p_j = \mathbf{P}(\xi_k = j)$$

$$-M \leqslant j \leqslant m;\ M > 0,\ m > 0;\ p_{-M} > 0,\ p_m > 0,\ \sum_{j=-M}^{m} p_j = 1$$

и буквой d — общий наибольший делитель разностей возможных значений ξ_k. Ряд вопросов теории случайных блужданий, в том числе вопросы, изложенные в главах 2 — 3, приводят к функционально-разностным уравнениям вида

$$u_x(z) - u_x = z \sum_{j=-M}^{m} p_j u_{x-j}(z) \tag{1.1}$$

Решение $u_x(z)$ такого уравнения обязано удовлетворять некоторым начальным условиям, однозначно определяющим его в заданном классе функций (как правило, в классе функций, ограниченных внутри единичного круга).

1. Положим:

$$w(\lambda) = \sum_{j=-M}^{m} p_j \lambda^{-j}, \qquad W(\lambda) = \lambda^m w(\lambda),$$

$$W(\lambda,\ z) = W(\lambda) - \frac{\lambda^m}{z}. \tag{2.1}$$

Характеристическим уравнением для (1.1) является уравнение

$$W(\lambda,\ z) = 0. \tag{3.1}$$

Остановимся на его свойствах. Обозначим через $\mathfrak{E}$ область, полученную удалением из полной плоскости дискриминантного множества уравнения (3.1). В $\mathfrak{E}$ уравнением (3.1) определяется $m + M$-значная алгебраическая функция

* Ради удобства и краткости описания относительно производящей функции и корней, связанных с ней уравнений здесь употреблялись несколько иные обозначения, чем в главах 1 — 3. Введение производящей функции от обратного аргумента, фигурирующей в основном тексте, было бы здесь неестественным.

** Результаты работы переносятся без труда и сохраняются полностью в случае, когда ξ_k неограничены слева и $\alpha(x - \alpha n)$ таково, что $\omega(\lambda)$ в точке λ_α аналитична.

$\lambda(z)$: в окрестности любой точки $\zeta \in \mathfrak{E}$ существует ровно $m+M$ аналитических функций $\lambda_j(z)$ $j=1, 2, \ldots, m+M$ (ветвей алгебраической функции $\lambda(z)$), обращающих в тождество уравнение (3.1) и таких, что числа $\lambda_j(\zeta)$ $j=1, 2, \ldots, m+M$ все различны. Если в $\mathfrak{E}$ на некоторое время зафиксировать разрезы, соединяющие особые точки с точкой $z=\infty$, то аналитическим продолжением функций $\lambda_j(z)$ из окрестности точки ζ определится $m+M$, ветвей, аналитических во всей полученной области. Нумерация ветвей при этом порождается их нумерацией в точке ζ.

Результант многочлена (2.1) и его производной показывает, что дискриминантное множество уравнения (3.1) состоит из точки $z=0$ и не более $m+M$ точек, отличных от 0. При этом, как это видно из (2.1), точка $z=0$ для M ветвей является полюсом. Для остальных m ветвей — точкой ветвления, в которой они образуют одну круговую систему, принимают значение, равное 0, и, следовательно, разлагаются в окрестности точки $z=0$ в ряд по степеням $z^{\frac{1}{m}}$ без свободного члена. Особые точки, отличные от $z=0$, будут точками кратности $\lambda(z)$.

Далее, функция $\lambda(z)$ полностью определяется заданием своих значение, в любом секторе раствора $\theta=\frac{2\pi}{d}$, например, $|\arg z|<\frac{\theta}{2}$. Действительно, пусть $\lambda^*(z)$ — одна из ветвей, определенная в некоторой области $\mathfrak{D}^*$, лежащей в этом секторе. Тогда функция $\lambda^{**}(z)$: $\lambda^{**}(z\omega)=\lambda^*(z)\,\omega^{\mathrm{m}}$, $\omega=e^{i\theta}$, определенная в области $\mathfrak{D}^*\omega^*$, при надлежащем выборе m обращает в тождество уравнение (3.1) при $z\in\mathfrak{D}^*$

$$W(\lambda^{**}(z\omega),\ z\omega)=W(\lambda^*(z)\,\omega^{\mathrm{m}})-\frac{(\lambda^*(z))^m\omega^{m\mathrm{m}}}{z\omega}\equiv 0,$$

если только

$$m\mathrm{m}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d).$$

Число $\mathrm{m}<d$ определяется однозначно, так как $(m, d)=1$. Таким образом, результат аналитического продолжения функции $\lambda_j(z)$ $1\leqslant j\leqslant m+M$ из окрестности точки $\zeta\in\mathfrak{E}$ в окрестность точки $\zeta\omega$ по произвольному контуру, лежащему в $\mathfrak{E}$, совпадает с одной из функций совокупности

$$\lambda_1(z\omega^{-1})\,\omega^{\mathrm{m}},\ \ldots,\ \lambda_{m+M}(z\omega^{-1})\,\omega^{\mathrm{m}}. \tag{4.1}$$

Происходящая при этом перестановка номеров зависит от контура. Расположение особых точек на плоскости не меняется при повороте последней на угол θ.

Определение. Совокупность ветвей функции $\lambda(z)$

$$\lambda_{j_1}(z),\ \ldots,\ \lambda_{j_l}(z)\quad l\leqslant m+M \tag{5.1}$$

удовлетворяет в области $\mathfrak{R}$ *условиям регулярности*, если

---

* Если C — область (контур) в плоскости z, то во всем дальнейшем под $Ce^{i\Psi}$ будет пониматься область (контур) такая, что $z\in Ce^{i\Psi}$, если $ze^{-i\Psi}\in C$.

1°. Возвращение в точку $\zeta \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}$ по произвольному замкнутому контуру, целиком лежащему в $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}$, переводит совокупность функций (5.1) в себя.

2°. Все ветви из (5.1) ограничены в $\mathfrak{R}$.

Произвольный симметрический многочлен от $\lambda_{j_1}(z), \ldots, \lambda_{j_l}(z)$, удовлетворяющих в области $\mathfrak{R}$ условиям регулярности, является в $\mathfrak{R}$ аналитической функцией (см. [19]).

2. Уравнение (3.1) можно записать в виде $w(\lambda) = \frac{1}{z}$, причем $w''(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$ и $w(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +0, +\infty$. Поэтому (3.1) будет иметь два различных положительных корня $\tilde{\lambda}(z)$ и $\tilde{\Lambda}(z)$; $\tilde{\lambda}(z) < \tilde{\Lambda}(z)$, если z положительно и $z < R = \frac{1}{w_0}$, $w_0 = \min\limits_{\lambda > 0} w(\lambda)$ и кратный положительный корень, если $z = R$. При $z \to 0$ имеем $\tilde{\lambda}(t) \to 0$ и $\tilde{\Lambda}(z) \to \infty$. В частности, когда $w(1) = 1$, для $z < 1$ всегда

$$\tilde{\lambda}(z) < 1, \quad \tilde{\Lambda}(z) > 1. \tag{6.1}$$

Так как при убывании z вдоль действительной оси от точки R $\tilde{\lambda}(t)$ убывает, то, выкинув из плоскости z, например, луч $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z > R$, получим для достаточно малых $|z - R|$ разложение, которое запишем в виде

$$\tilde{\lambda}(z) = \tilde{\lambda}(R) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k t^k (z - R)^{k/2}_{\text{гл.}}, \tag{7.1}$$

где ψ_k $k = 0, 1, \ldots$ действительны, $\psi_0 = 1$, $\psi_1 > 0$.

Имеет место следующая теорема, принадлежащая Pellet ([20]). *Пусть*

$$\varkappa(\lambda) = |\varkappa_0| + |\varkappa_1|\lambda + \ldots + |\varkappa_{m-1}|\lambda^{m-1} - |\varkappa_m|\lambda^m - |\varkappa_{m+1}|\lambda^{m+1} + \ldots$$

$$\ldots + |\varkappa_{m+M}|\lambda^{m+M},$$

$$K(\lambda) = \sum_{k=0}^{m+M} \varkappa_k \lambda^k,$$

Тогда, если $\varkappa(\lambda)$ имеет два положительных нуля $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\Lambda}$ $\tilde{\lambda} < \tilde{\Lambda}$, то $K(\lambda)$ не имеет нулей в кольце $\tilde{\lambda} < |\lambda| < \Lambda$ и имеет ровно m нулей в круге $|\lambda| \leqslant \tilde{\lambda}$.

Теорема с очевидными изменениями сохраняется и в случае $\tilde{\lambda} = \tilde{\Lambda}$. Положим $K(\lambda) = W(\lambda) - \frac{\lambda^m}{z}$. Так как $\left| p_0 - \frac{1}{z} \right| \geqslant \frac{1}{|z|} - p_0$, то из теоремы следует, что уравнение (3.1) при $|z| \leqslant R$ имеет ровно m корней, назовем их $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$, таких, что

$$|\lambda_j(z)| \leqslant \tilde{\lambda}(|z|); \; j = 1, 2, \ldots, m \tag{8.1}$$

и M корней $\Lambda_1(t) = \lambda_{m+1}(t), \ldots, \Lambda_M(z) = \lambda_{m+M}(z)$ таких, что

$$|\Lambda_j(z)| \geqslant \tilde{\Lambda}(|z|); \; j = 1, 2, \ldots, M. \tag{9.1}$$

Лемма 1. *В соотношении* (8.1), ((9.1)) *равенство достигается лишь для одной из ветвей и только тогда, когда* $\arg z$ *кратен* $\theta = \frac{2\pi}{d}$.

Доказательство. В соответствии с предыдущим лемму достаточно доказать для $|\arg z| < \frac{\theta}{2}$.

Пусть сначала $\varphi = \arg z = 0$. Одно из значений $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ совпадает с $\tilde{\lambda}(z)$. Пусть это будет $\lambda_1(z)$. Тогда надо показать, что

$$|\lambda_j(z)| < \lambda_1(z) \qquad j = 2, 3, \ldots, m; \; z \leqslant R. \tag{10.1}$$

Для этого достаточно убедиться, что $|\lambda_j(z)| \neq \lambda_1(z)$; $j = 2, 3, \ldots, m$. Пусть для некоторого $2 \leqslant j \leqslant m$ $\lambda_j(z) = \lambda_1(z) e^{i\psi}$. Тогда либо ψ некратно ϑ и, следовательно,

$$|W(\lambda_j(z))| < W(\lambda_1(z)) = \frac{1}{z}\lambda_1^m(z) = \left|\frac{1}{z}\lambda_j^m(z)\right|,$$

либо ψ кратно ϑ и $W(\lambda_j(z)) = W(\lambda_1(z)) = \frac{1}{z}\lambda_1^m(z) \neq \frac{1}{z}\lambda_j^m(z)$, так как $(m, d) = 1$ и ψ не кратно 2π. В обоих случаях равенство $\lambda_j(z) = \lambda_1(z) e^{i\psi}$ оказалось невозможным, что доказывает (10.1).

Остается проверить, что равенства $|\lambda_j(z)| = \tilde{\lambda}(|z|)$ $j = 1, 2, \ldots, m$ также невозможны, если только $\varphi \neq 0$. Пусть $\lambda_j(z) = \tilde{\lambda}(|z|) e^{i\psi}$ $1 \leqslant j \leqslant m$. Аналогично предыдущему случаю имеем: при ψ, некратном θ,

$$|W(\lambda_j(z))| < W(\tilde{\lambda}(|z|)) = \frac{1}{|z|}\tilde{\lambda}^m(|z|) = \left|\frac{1}{z}\lambda_j^m(z)\right|.$$

При ψ, кратном ϑ, $m\psi + \varphi$ не кратно θ и, следовательно, не может быть кратно 2π. Поэтому $W(\lambda_j(z)) = W(\tilde{\lambda}(|z|)) = \frac{1}{|z|}\tilde{\lambda}^m(|z|) \neq \frac{1}{z}\lambda_j^m(z)$. Для ветвей $\Lambda_1(z), \ldots, \Lambda_M(z)$ доказательство проходит аналогично.

В последующих рассмотрениях функции $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$, как правило, будут связаны с незамкнутыми контурами, лежащими в круге $|z| \leqslant R$ и один раз пересекающими отрезок $[0, R]$. В точке пересечения нумерация ветвей будет определяться так, чтобы выполнялось:

$$\lambda_1(z) > |\lambda_2(z)| \geqslant |\lambda_3(z)| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m(z)|. \tag{11.1}$$

В других точках контура под $\lambda_j(z)$ будет пониматься аналитическое продолжение функции $\lambda_j(z)$ из окрестности точки пересечения, если контур не содержит особых точек. Случаи, когда последнее условие не выполняется, будут оговариваться особо. Функция $\lambda_1(z)$, определенная неравенствами (11.1), будет аналитической во внутренности отрезка $[0, R]$. Будем теперь непрерывно продолжать значения $\lambda_j(z)$ $j = 1, \ldots, m$ вдоль окружности $|z| = \text{const}$, $|z| \leqslant R$. Тогда из леммы следует, что образы этой окружности образуют в плоскости λ семейство замкнутых алгебраических кривых, которые все лежат в круге $|\lambda| \leqslant \lambda_1(|z|)$. Касание круга происходит лишь при $z = |z|\omega^k$ $k = 0, \ldots, d-1$. При $z = R\omega^k$ касающаяся ветвь, как показывает (7.1), будет в точке $\lambda_1(R)\omega^{km}$ иметь излом. Образы окружности $|z| = \text{const}$, $|z| \leqslant R$, порождаемые функциями $\Lambda_1(z), \ldots, \Lambda_M(z)$,

ведут себя аналогичным образом, располагаясь вне круга $|\lambda| \leqslant \Lambda(|z|) = \Lambda_1(|z|)$.

Из сказанного следует, что *в области* $\mathfrak{R}$, *полученной из круга* $|z| \leqslant R$ *удалением точек границы* $z = R\omega^k$; $k = 0, \ldots, d-1$ *функции* $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ *удовлетворяют условиям регулярности.* Точки $R\omega^k$ — это единственные точки круга $|z| \leqslant R$, в которых одна из «внутренних» ветвей $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ соприкасается с одной из «внешних» $\Lambda_1(z), \ldots, \Lambda_M(z)$. Вместо $\mathfrak{R}$ можно рассматривать *расширенную* область $\mathfrak{R}^*$, полученную из круга $|z| \leqslant R^* = R + \delta$, $\delta > 0$ вырезанием отрезков лучей $\arg z = k\theta$ $k = 0, 1, \ldots, d-1$ длины δ: от $|z| = R^*$ до $|z| = R$, причем δ следует взять настолько малым, чтобы круг $|z| \leqslant R^*$ не содержал новых по сравнению с кругом $|z| \leqslant R$ особых точек функции $\lambda(z)$. *Функции* $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ *в области* $\mathfrak{R}^*$ *также будут удовлетворять условиям регулярности.* Принимая во внимание замечание, относящееся к (4.1), получим, что, если $V(\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z))$ однородный порядка v симметрический многочлен от своих переменных, то функция $v(z) = V(\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z))$ аналитична в $\mathfrak{R}^*$ и

$$v(z\omega) = \omega^{vm} v(z). \tag{12.1}$$

Для предельных распределений вероятности первого перескока особую роль будут играть функции (z положительно, $z \leqslant R$)

$$W_1(\lambda, z) = \prod_{j=2}^{m} (\lambda - \lambda_j(z)) \text{ и } W_2(\lambda, z) = \prod_{j=2}^{M} (\lambda - \Lambda_j(z)) \tag{13.1}$$

являющиеся делителями многочлена $W(\lambda, z) = (\lambda - \lambda_1(z))(\lambda - \Lambda_1(z)) W_1(\lambda, z) \times W_2(\lambda, z)$. Характеристическими свойствами $W_1(\lambda, z)$ и $W_2(\lambda, z)$ является, очевидно, отсутствие у них нулей соответственно в областях $|\lambda| \geqslant \lambda_1(z)$ и $|\lambda| \leqslant \Lambda_1(z)$.

Глава 2. ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ

§ 1. Производящая функция

Пусть η_x означает количество скачков блуждающей частицы до ее поглощения экраном в точке x и χ_x — величина первого перескока частицы через x. В настоящей главе будет изучаться асимптотическое при $n \to \infty$ поведение вероятности $\mathbf{P}(\eta_x = n) = \mathbf{P}(\overline{s}_{n-1} < x,\ s_n \geqslant x)$.

1. Рассмотрение несколько удобнее проводить с вероятностью $u_{x,n}^{(y)} = \mathbf{P}(\eta_x = n,\ \chi_x = y)$. При $x > 0$, $u_{x,n}^{(y)}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{x,n+1}^{(y)} = \sum_{j=-M}^{m} p_j u_{x-j,n}^{(y)} \tag{1.2}$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$u_{x,0}^{(y)} = 0,\ x > 0; \tag{2.2}$$

$$u_{-y,0}^{(y)} = 1,\ u_{x,0}^{(y)} = 0\ \ 0 \geqslant x \geqslant -m+1,\ x \neq -y;\ u_{x,n}^{(y)} = 0\ \ n > 0,$$
$$0 \geqslant x \geqslant -m+1 \tag{3.2}$$

Введем производящие функции $u_x^{(y)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{x,n}^{(y)} z^n$. Из (1.2), (2.2) получаем уравнение:

$$u_x^{(y)}(z) = z \sum_{j=-M}^{m} p_j u_{x-j}^{(y)}(z),\ x > 0. \tag{4.2}$$

Соотношения (3.2) перейдут в следующие *:

$$u_{-y}^{(y)}(z) = 1, \quad u_x^{(y)}(z) = 0\ \ 0 \geqslant x \geqslant -m+1,\ x \neq -y. \tag{5.2}$$

Кроме того, равенства (1.2) — (3.2) означают, что в круге $|z| \leqslant h$ $(0 < h < 1)$ $u_x^{(y)}(z)$ равномерно ограничена при $x \to \infty$ **. Пусть $z \in \mathfrak{E}$ и $|z| < 1$. Тогда решение $u_x^{(y)}(z)$ уравнения (4.2) может быть записано в виде

$$u_x^{(y)}(z) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(z,\ y)\lambda_j^x(z) + \sum_{j=1}^{M} \Lambda_j(z,\ y)\Lambda_j^x(z), \tag{6.2}$$

где $\lambda_j(z,\ y)$, $\Lambda_j(z,\ y)$ — функции, подлежащие определению. Неравенства (5.1), (9.1) означают, что вторая сумма в (6.2) в области $|z| \leqslant h$ должна тождественно равняться нулю, так как в противном случае $|u_x^{(y)}(z)|$ при $x \to \infty$ принимал бы неограниченно большие значения ***. Функции $\lambda_j(z,\ y)$ $j = 1, \ldots, m$ однозначно определяются начальными условиями (5.2):

$$\lambda_j(z,\ y) = \frac{(-1)^y \sigma_j^{(y)}(z)\,\lambda_j^{m-1}(z)}{\pi_j(z)}.$$

Здесь $\sigma_j^{(y)}(z)$ — основной симметрический многочлен от $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_{j-1}(z), \lambda_{j+1}(z), \ldots, \lambda_m(z)$ порядка y, $1 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant m-1$ и $\pi_j(z) = \prod_{k=1,\ k \neq j}^{m} (\lambda_j(z) - \lambda_k(z))$.

---

* Для отыскания асимптотического поведения значений $u_{x,n}^{(y)}$, определяемых равенствами (1.2) — (3.2), в дальнейшем существенным будет лишь условие $p_j \geqslant 0$. Значения Σp_j, начальных и граничных условий (2.2), (3.2) могут быть произвольными. В (2.2) надо потребовать только не слишком быстрого роста $u_{x,0}^{(y)}$ при возрастании x:

$$|u_{x,0}^{(y)}| < u_0^x,\ u_0 = \text{const} \tag{2'.2}$$

** Для произвольных начальных условий или в случае, когда $\Sigma p_j \neq 1$ из (2'.2), следует $u_{x,n}^{(y)} < u_1 \cdot u_0^x \cdot Mn\,(\Sigma p_j)^n$, откуда при $|z| < u_2 - (u_0^M \Sigma p_j)^{-1}$ имеем $|u_x^{(y)}(z)| < u_1 \times u_0^x \left(1 - \frac{|z|}{u_2}\right)^{-1}$, где u_0, u_1, u_2 не зависят от x и z.

*** В общем случае, чтобы убедиться в равенстве нулю второй суммы, надо рассмотреть круг настолько малого радиуса, чтобы было $\Lambda_1(|z|) > u_0$.

Таким образом, *на пересечении* $\mathfrak{E}$ *и круга* $|z| \leqslant h$ $(0 < h < 1)$ *существует единственное решение поставленной задачи, равное*

$$u_x^{(y)}(z) = (-1)^y \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1}(z) \frac{\sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)}. \qquad (7.2)$$

2. $u_x^{(y)}(z)$ является рациональной симметрической относительно $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ функцией и может быть представлена в виде отношения двух симметрических многочленов. Поэтому $u_x^{(y)}(z)$ в области $\mathfrak{R}^*$ равна отношению двух аналитических функций. Покажем, что и сама *функция* $u_x^{(y)}(z)$ *в* $\mathfrak{R}^*$ *аналитична*. Для этого убедимся, что в точках кратности функции $\lambda(z)$, лежащих в $\mathfrak{R}^*$, $u_x^{(y)}(z)$ не может иметь полюсов. Пусть ζ такая точка кратности. Рассмотрим произвольное слагаемое суммы (7.2). Обозначим его номер через j_0. Тогда либо $\lambda_{j_0}(\zeta)$ простой корень уравнения (3.1) и $\pi_{j_0}(\zeta) \neq 0$, либо

$$\lambda_{j_0}(\zeta) = \lambda_{j_1}(\zeta) = \ldots = \lambda_{j_{l-1}}(\zeta) \quad 1 < l \leqslant m, \quad \lambda_j(\zeta) \neq \lambda_{j_0}(\zeta)$$

$$\text{при } j \neq j_k \quad k = 0, 1, \ldots, l-1$$

Так как $\zeta \in \mathfrak{R}^*$, то эти соотношения означают, что $w^{(l)}(\lambda_{j_0}(\zeta)) \neq 0$ и, следовательно, $\lambda_{j_k}(z)$ $k = 0, \ldots, l-1$ в окрестности точки ζ разлагаются в ряд по степеням $(z-\zeta)^{1/l}_{\text{гл.}}$ с коэффициентами при $(z-\zeta)^{1/l}_{\text{гл.}}$, отличными от нуля. Поэтому около точки ζ $\pi_j(z) = (z-\zeta)^{\frac{l-1}{l}}_{\text{гл.}} \widetilde{\pi}_{j_0}(z)$, $\widetilde{\pi}_{j_0}(\zeta) \neq 0$; т. е. произвольное слагаемое в $u_x^{(y)}(z)$ возрастает при $z \to \zeta$ не быстрее, чем $|z-\zeta|^{-\frac{l-1}{l}}$, что противоречит допущению о сосуществовании полюса в точке ζ. Аналитичность $u_x^{(y)}(z)$ в $\mathfrak{R}^*$ доказана.

Так как $\lambda_2(z), \ldots, \lambda_m(z)$ в окрестности точки $z = R$ удовлетворяет условиям регулярности, то после обхода из некоторой точки области $\mathfrak{R}^*$ вокруг $z = R$ изменения в выражении для $u_x^{(y)}(z)$ сведутся к замене $\lambda_1(z)$ на $\Lambda_1(z)$. При повторном обходе $u_x^{(y)}(z)$ вернется к исходному значению. Следовательно, многолистная функция, ветвью которой является $u_x^{(y)}(z)$, имеет при $z = R$ точку ветвления второго порядка и разлагается в окрестности точки $z = R$ по степеням $(z-R)^{1/2}$.* В силу (12.1)

$$u_x^{(y)}(z\omega) = \omega^{m(x+y)} u_x^{(y)}(z). \qquad (8.2)$$

Поэтому описанным свойством функция $u_x^{(y)}(z)$ обладает во всех точках $z = R\omega^k$ $k = 0, 1, \ldots, d-1$. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что корни $\lambda_2(R), \ldots, \lambda_m(R)$ различны, и обозначать

$$\lambda_j(R) = \lambda_j; \quad \sigma_j^{(y)}(R) = \sigma_j^{(y)}; \quad \pi_j(R) = \pi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

---

* Нетрудно проверить, что около точки $z = R$ $u_x^{(y)}(z)$ является отношением со знаменателем, не равным 0, двух многочленов по степеням $\lambda_1(z)$ с аналитическими коэффициентами.

На изменения, которые могут произойти с окончательными результатами при появлении среди корней $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ кратных, будет указано в § 2.

3. Перейдем к вычислению значений $u_{x,n}^{(y)}$. Пусть Γ — замкнутый, содержащий внутри себя точку $z=0$, положительно ориентированный контур, лежащий в области $\mathfrak{R}^*$. Тогда искомое значение $u_{x,n}^{(y)}$ определяется как

$$u_{x,n}^{(y)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_x^{(y)}(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Если $\Gamma\omega = \Gamma$ и γ часть Γ, для которой $|\arg z| < \frac{\theta}{2}$, то в силу (8.2)

$$u_{x,n}^{(y)} = \frac{d(n,\ x,\ y)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u_x^{(y)}(z)}{z^{n+1}}\,dz, \tag{9.2}$$

где

$$d(n,\ x,\ y) = \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{(n-m(x+y))j} = \begin{cases} d, & \text{если } n \equiv m(x+y) \pmod d \\ 0, & \text{если } n \not\equiv m(x+y) \pmod d \end{cases}$$

Пусть y фиксировано и C — произвольный контур, не содержащий точки $z=0$ и лежащий в области $\mathfrak{R}^*$. Если вдоль C функция $\lambda_j(z)$ однозначно определена, то обозначим:

$$I_j(x,\ C) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\lambda_j^{x-m-1}(z)\,\sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)\,z^{n+1}}\,dz.$$

Последующие три параграфа посвящены вычислению такого типа интегралов и получению значений $u_{x,n}^{(y)}$ для $x = o(n)$; $x \sim \alpha n$ $0 < \alpha < m$; $x \sim mn$.

§ 2. $x = o(n)$

1. В качестве Γ возьмем границу $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$ области $\mathfrak{R}$, где величину δ выберем позднее. Участок $\gamma_{\mathfrak{R}^*}$ границы $\Gamma_{\mathfrak{R}^*}$, лежащий в секторе $|\arg z| < \frac{\theta}{2}$, состоит из дуги γ_1 окружности радиуса $R+\delta$, $-\frac{\theta}{2} < \arg z < 0$; нижнего и верхнего краев — γ_2 разреза от $R+\delta$ до R и дуги γ_3 окружности того же радиуса $R+\delta$, $0 < \arg z < \frac{\theta}{2}$. Вычислим сначала величину интеграла $I_1(\tau n,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})$, понимая под τ действительное положительное число. Вид контура $\gamma_{\mathfrak{R}^*}$ вместе с поведением $u_x^{(y)}(z)$ в окрестности точки $z=R$ указывает на необходимую замену

$$t = i\,(z-R)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.2}$$

В плоскости нового переменного обозначим

$$\psi(t) = \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1},\quad a_1(t) = \frac{\sigma_1^{(y)}(z)\,\lambda_1^{m-1}(z)}{z\cdot\pi_1(z)}. \tag{11.2}$$

Для этих функций в силу (7.1) около точки $t = 0$ имеют место разложения

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k t^k, \quad a_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} t^k,$$

где ψ_k, a_{1k} $k = 0, 1, \ldots$ вещественны; $\psi_0 = 1$, $\psi_1 > 0$,

$$a_{10} = \frac{\lambda_1^{m-1}\sigma_1^{(y)}}{\pi_1 \cdot R}, \quad a_{11} = \frac{\lambda_1 \psi_1 \sigma_1^{(y)}}{R} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{m-1}}{\pi_1}\right). \tag{12.2}$$

Здесь и в дальнейшем под обозначением $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ понимается $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)_{\lambda=\lambda_1}$. Пусть, кроме того,

$$h(t) = \tau \ln \psi(t) - \ln\left(1 - \frac{t^2}{R}\right) \tag{13.2}$$

(имеются в виду главные значения логарифмов, стремящиеся к 0 при $t \to 0$). Тогда в результате (10.2), (11.2), (13.2) для интеграла $I_1(\tau n, \gamma_2)$ получаем:

$$I_1(\tau n, \gamma_2) = -\frac{1}{\pi i} \frac{\lambda_1^{\tau n}}{R^n} \int_{-i\sqrt{\delta}}^{i\sqrt{\delta}} t a_1(t) e^{nh(t)} dt. \tag{14.2}$$

При этом δ всегда может быть выбрано таким, чтобы подынтегральные функции в (14.2) были аналитическими в области $|t| \leqslant \sqrt{\delta}$. Можно считать также, что $\lambda_1(z)$ не имеет нулей на γ_1, γ_3.

2. Для нахождения точки перевала функции $e^{h(t)}$ рассмотрим уравнение $\tau\psi'(t)(R - t^2) + 2t\psi(t) = 0$. Левая часть последнего есть аналитическая по τ и t (в окрестности нуля) функция, у которой свободный коэффициент в разложении по степеням τ и t равен 0 и коэффициент при t отличен от нуля. По теореме о неявной функции решение этого уравнения, которое мы обозначим через t_0, является аналитической функцией τ в точке $\tau = 0$. Первые члены разложения в ряд этой функции таковы:

$$t_0 = -\frac{R\psi_1}{2}\tau + \frac{R^2\psi_1}{4}(2\psi_2 - \psi_1^2)\tau + \ldots \tag{15.2}$$

так, что при достаточно малых τ:

$$h(t_0) = -\frac{R\psi_1^2}{4}\tau^2 + \frac{R^2\psi_1^2}{8}(2\psi_2 - \psi_1^2)\tau^3 + \ldots$$

$$h''(t_0) = \frac{2}{R} + (2\psi_2 - \psi_1^2)\tau + \ldots \tag{16.2}$$

$$h'''(t_0) = 2\left(3\psi_3 - 3\psi_1\psi_2 + \psi_1^3 - 3\frac{\psi_1}{R}\right)\tau + \ldots$$

Поскольку $h'(t_0) = 0$, то кривые $\operatorname{Re} h(t) = h(t_0)$ делят окрестность точки t_0

на 4 прямоугольных сектора, в которых поочередно $\operatorname{Re} h(t) < h(t_0)$ и $\operatorname{Re} h(t) > h(t_0)$.

В качестве последних ограничений на величины τ и δ потребуем, чтобы τ удовлетворяло соотношениям:

$$\tau < \frac{\sqrt{\delta}}{R\psi_1} \tag{17.2}$$

$$\tau \ln \sup_{\gamma_1, \gamma_3} \left| \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1} \right| - h(t_0) < \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\delta}{2} \right), \tag{18.2}$$

а δ было настолько малым, чтобы точки $-i\sqrt{\delta}$ и $i\sqrt{\delta}$ попали в сектора, где $\operatorname{Re} h(t) < h(t_0)$. В силу (17.2) этого всегда можно добиться. Пользуясь

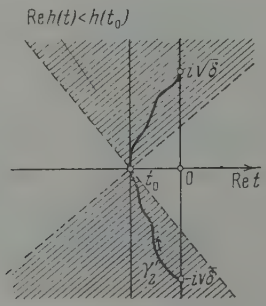


Рис. 1

аналитичностью в области $|t| < \sqrt{\delta}$ подынтегрального выражения в (14.2), мы можем прямолинейный контур интегрирования заменить на другой — γ_2', проходящий через точку t_0, вдоль которого

$$\operatorname{Re} h(t) < h(t_0), \quad t \neq t_0. \tag{19.2}$$

Далее, на дугах γ_1 и γ_2 подынтегральные функции в $I_1(\tau n, \gamma_1)$ и $I_1(\tau n, \gamma_3)$, по определению области $\mathfrak{R}^*$, являются аналитическими по z и, следовательно, аналитическими по t. Если γ_1' и γ_3' — образы в плоскости t границ γ_1 и γ_3, то в силу неравенства (18.2) всюду вдоль γ_1' и γ_3'

$$\operatorname{Re} h(t) < h(t_0) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\delta}{R} \right). \tag{20.2}$$

Таким образом, контур $\gamma_{\mathfrak{R}^*}'$, составленный из γ_1', γ_2' и γ_3', целиком лежит в области аналитичности функций $\widetilde{a}_1(t) = ta_1(t)$ и $h(t)$ (на γ_1, γ_2 $\lambda_1(z) \neq 0$), характеризуется неравенствами (19.2), (20.2) и входит в точку t_0 из полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$. Так как

$$I_1(\tau n, \gamma_{\mathfrak{R}^*}) = -\frac{1}{\pi i} \frac{\lambda_1^{\tau n}}{R^n} \int\limits_{\gamma_{\mathfrak{R}^*}'} \widetilde{a}_1(t) e^{nh(t)} dt,$$

то сказанное позволяет провести интегрирование $I_1(\tau n, \gamma_{\mathfrak{R}^*})$ с помощью метода перевала.

3. Обозначим через $q_{l,j}$ коэффициент при z^l в произведении

$$\frac{1}{j!}(\tilde{a}_0+\tilde{a}_1 z+\tilde{a}_2 z^2+\ldots)(h_1 z+h_2 z^2+\ldots)^j,$$

где

$$\tilde{a}_k=\frac{\tilde{a}_1^{(k)}(t_0)}{k!},\quad h_k=\frac{h^{(k+2)}(t_0)}{(k+2)!}\quad k=0,\ 1,\ \ldots. \tag{21.2}$$

Тогда формулы Перрона (см. [17]) дают в нашем случае:

$$\int_{\Upsilon_{\mathfrak{R}^*}}\tilde{a}_1(t)\,e^{nh(t)}dt=e^{nh(t_0)}\left\{\sum_{l=0}^{k-1}Q_l\left(\frac{1}{nh_0}\right)^{l+1/2}+O\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right)\right\} \tag{22.2}$$

$$Q_l=i(-1)^l\sum_{j=0}^{2l}\frac{q_{2l,j}}{(-h_0)^j}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+l+j\right).$$

Отметим сразу же, что остаточный член в (22.2) можно считать равномерным относительно параметра τ — для всех τ меньших некоторого τ_0. Действительно, пусть ρ_a и ρ_h числа, соответственно меньшие радиусов сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{a}_1^{(k)}(0)}{k!}t^k\ \text{и}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}t^k.$$

Выберем в качестве τ_0 такое число, чтобы при $\tau<\tau_0$ было: $|t_0|<\frac{1}{2}\min(\rho_a,\ \rho_h)$. Тогда в силу неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда:

$$\left|\frac{\tilde{a}_1^{(k)}(t_0)}{k!}\right|<\max_{|t|=\rho_a}|\tilde{a}_1(t)|\left(\frac{2}{\rho_a}\right)^k;\quad\left|\frac{h^{(k)}(t_0)}{k!}\right|<\max_{|t|=\rho_h}|h(t)|\left(\frac{2}{\rho_h}\right)^k\ k=0,\ 1,\ \ldots \tag{23.2}$$

как только $\tau<\tau_0$. Незначительно изменив рассуждения доказательства равенств (22.2) в [17], получим, что требуемая равномерность остаточного члена в (22.2) является следствием (20.2) и равномерности неравенств (23.2). Формулы (22.2) дают возможность в окончательных результатах получать асимптотические разложения по степеням $\frac{1}{n}$. Однако для краткости изложения мы везде будем указывать лишь относительные порядки малости остаточных членов.

4. Сопоставляя (21.2) с (12.2), (15.2), (16.2), для малых значений τ получаем:

$$Q_0=-\frac{i\sqrt{\pi}\,\psi_1\lambda_1^{m-1}\sigma_1^{(y)}}{2\,\pi_1}\tau+O(\tau^2),\quad Q_1=-\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\frac{\psi_1\lambda_1\sigma_1^{(y)}}{R}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^m}{\pi_1}\right)+O(\tau).$$

Положим в фигурных скобках в (22.2) $k=2$. Из полученных равенств следует тогда*:

* Положительность $(-1)^{y_0}\sigma_1^{(y)}$ доказана в § 5 настоящей главы.

$$\lambda_1^{\tau n}\left\{\frac{Q_0}{(nh_0)^{1/2}}+\frac{Q_1}{(nh_0)^{3/2}}+O\left(\frac{1}{h^{5/2}}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{i\sqrt{\pi R}}{2n^{3/2}}\psi_1\lambda_1\sigma_1^{(y)}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{\tau n+m-1}}{\pi_1}\right)\left\{1+O(\tau)+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{\tau n^2}\right)\right\}.$$

При $n\to\infty$ и $\tau\to 0$ так, что $n\tau\geqslant 1$, это дает окончательно:

$$I_1(\tau n,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})=\frac{\psi_1\lambda_1\tau_1^{(y)}}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{nH(\tau)}\partial}{n^{3/2}R^{n-1/2}}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{\tau n+m-1}}{\pi_1}\right)\{1+O(\tau)\},\qquad(24.2)$$

где $H(\tau)=h(t_0)$. Искомое значение $I_1(x,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})$ получается подстановкой в (24.2) значения $\tau=\frac{x}{n}$. При этом, очевидно, все наложенные на τ ограничения будут удовлетворены.

5. Перейдем к вычислению интегралов $I_j(x,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})$ $j=2,\ \ldots,\ m$. Рассмотрение здесь целесообразно разбить на два этапа; пусть сначала x не зависит от n. После замены (10.2) обозначим:

$$a_j(t)=\frac{\lambda_j^{x+m-1}(z)\,\sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)},\quad j=2,\ \ldots,\ m.$$

В силу (8.2) и допущения о простоте корней $\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ функции $a_j(t)$ будут аналитическими в точке $t=0$ и, следовательно, представимы при достаточно малом $|t|$ в виде рядов

$$a_j(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{jk}t^k\quad j=2,\ \ldots,\ m,$$

где

$$a_{j0}=\frac{\lambda_j^{x+m-1}\sigma_j^{(y)}}{\pi_j},\quad a_{j1}=\lambda_j^{x+m-1}\lambda_1\psi_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right).\qquad(25.2)$$

Найдем величину интеграла

$$I_j(x,\ \gamma_2)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-i\sqrt{\delta}}^{i\sqrt{\delta}}\frac{a_j(t)\,tdt}{(R-t^2)^{n+1}}.$$

После замены $t=iu$ можно записать:

$$I_j(x,\ \gamma_2)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\sqrt{\delta}}^{\sqrt{\delta}}\frac{a_{j0}+iua_{j1}-u^2a_{j2}+u^3a_{j3}(u)}{(R+u^2)^{n+1}}udu,$$

где функция $a_{j3}(u)$ при достаточно малом δ аналитична вдоль всего пути интегрирования. Следовательно, под знаком интеграла $|a_{j3}(u)|<\bar{a}_{j3}=\text{const}$. Это дает сразу (см. [21] стр. 161 № 3191):

$$I_j(x,\ \gamma_2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{n-1/2}n^{3/2}}\left(a_{j1}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\qquad(26.2)$$

Далее, функция $\lambda_j^{x+m-1}(z)\dfrac{\sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)}$ аналитична на дугах γ_1, γ_3. Поэтому верна оценка:

$$|I_j(x,\ \gamma_k)| = O\left(\frac{1}{(R+\delta)^n}\right),\ (k=1,\ 3). \tag{27.2}$$

Сравнивая (25.2) — (27.2) получим

$$I_j(x,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*}) = \frac{\lambda_j^{x+m-1}\lambda_1\psi_1}{2\sqrt{\pi}R^{n-1/2}n^{3/2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Если же $x\to\infty$ при $n\to\infty$, то обычными для метода перевала рассуждениями нетрудно убедиться, что $|I_j(x,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})| = O\left(\dfrac{|\lambda_2|^x}{R^n n^{3/2}}\right)$ $j=2,\ \ldots,\ m$. Наконец, тождество $z\equiv\dfrac{1}{w(\lambda_1(z))}$ вместе с (7.1) однозначно определяют значения ψ_k $k=0,\ 1,\ \ldots,$ входящие в выражения для $I_j(x,\ \gamma_{\mathfrak{R}^*})$ $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. В частности,

$$\psi_1 = \frac{1}{R\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{w''(\lambda_1)}},\qquad \psi_2 = -\frac{w'''(\lambda_1)}{3\lambda_1R^2(w''(\lambda_1))^2}.$$

6. Резюмируя проведенные вычисления, получим следующее (см. (9.2)): $u_{x,n}^{(y)}=0$ при $mn\not\equiv x+y\ (\mathrm{mod}\,d)$; при $mn\equiv x-y\ (\mathrm{mod}\,d)$ выполняется:

А. Если x не зависит от n, то

$$u_{x,n}^{(y)} = \frac{(-1)^y d w_0^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\,n^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{x+m-1}\frac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{28.2}$$

В. Если $x\to\infty$ при $n\to\infty$ и $x=o(n)$, то

$$u_{x,n}^{(y)} = \frac{(-1)^y d\sigma_1^{(y)}w_0^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\,n^{3/2}}e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{x+m-1}}{\pi_1}\right)\left\{1+O(h^x)+O\left(\frac{x}{n}\right)\right\}. \tag{29.2}$$

Здесь $1>h\geqslant\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$; $H(\tau)$ — степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях $|\tau|$:

$$H(\tau) = -\frac{w_0}{w''(\lambda_1)}\frac{\tau^2}{2\lambda_1^2} - \left(\frac{w_0}{w''(\lambda_1)}\right)^2\left[\frac{w'''(\lambda_1)}{w''(\lambda_1)}+\frac{3}{\lambda_1}\right]\frac{\tau^3}{6\lambda_1^3}+\ldots. \tag{30.2}$$

Если среди корней $\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ окажутся кратные, то в п. А множитель $\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{x+m-1}\dfrac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right)$ заменится суммой произведений λ_j на некоторые многочлены от x степеней, на единицу меньших кратности соответствующих корней. Таким образом, доказана.

Теорема 1. *Пусть* λ_1 *— точка, в которой* $w(\lambda_1) = w_0 = \min\limits_{\lambda>0} w(\lambda)$; $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *— корни уравнения* $w(\lambda) - w(\lambda_1) = 0$, *удовлетворяющие неравенству* $|\lambda_j| < \lambda_1 \quad j = 2, \ldots, m$ *и*

$$\mathfrak{b}(mn - x) = \text{вычет } (mn - x) \pmod d \tag{31.2}$$

Тогда А. *Если* x *не зависит от* n *и корни* $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *простые, то*

$$\mathbf{P}(\eta_x = n) = \frac{dw_0^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{x+m-1}}{\pi_j} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1-\mathfrak{b}(mn-x)}{d}\right]} (-1)^{\mathfrak{b}(mn-x)+kd} \sigma_j^{(\mathfrak{b}(mn-x)+kd)}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

B. *Если* $x \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и* $x = O(n)$, *то*

$$\mathbf{P}(\eta_x = n) = \frac{dw_0^{n+1/2} e^{nH\left(\frac{x}{n}\right)}}{\sqrt{2\pi w''(\lambda_1)}\, n^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\frac{\lambda_1^{x+m-1}}{\pi_1}\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1-\mathfrak{b}(mn-x)}{d}\right]} (-1)^{\mathfrak{b}(mn-x)+kd} \sigma_1^{(\mathfrak{b}(mn-x)+kd)} \left(1 + O(h^x) + O\left(\frac{x}{n}\right)\right).$$

Здесь $h < 1$, $H(\tau)$ *дается формулой* (30.2) *и смысл обозначения* $\frac{\partial}{\partial \lambda_1}$ *указан в* (12.2). $\sigma_j^{(y)}$ *обозначают основные симметрические многочлены порядка* y *от корней* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_m$; $\pi_j = \prod\limits_{k=1,\, k\neq j}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)$ $j = 1, 2, \ldots, m$.

При $d = 1$ в приведенных формулах

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \sigma_j^k = \prod_{k=1,\, k\neq j}^{m} (1 - \lambda_k).$$

С помощью теоремы и равенств (28.2), (29.2) могут быть получены предельные при $n \to \infty$ значения вероятностей $\mathbf{P}(\chi_x = y / \eta_x = n)$. Например, при $d = 1$ и $x \to \infty$ вместе с n так, что $x = o(n)$ производящая функция указанных пределов оказывается равной $\frac{W_1(\lambda, R)}{W_1(1, R)}$ (см. (13.1)).

§ 3. $x \sim \alpha n$, $0 < \alpha < m$

1. Рассмотрим произвольные, но фиксированные числа τ_1, τ_2: $0 < \tau_1 < \tau_2 < m$ и функцию

$$g(z) = \frac{\lambda_1^{\tau}(z)}{z}, \tag{32.2}$$

$$\tau_1 < \tau < \tau_2, \tag{33.2}$$

аналитическую в любой внутренней точке отрезка $[0, R]$. $\lambda_1(z)$ в интервале $(0, R)$ положительна и монотонно возрастает: $\frac{d\lambda_1(z)}{dz} > 0, 0 < z < R$. Обозначим $w(\lambda, \tau) = \lambda^\tau w(\lambda)$. Тогда $g(z) = w(\lambda_1(z), \tau)$; $g'(z) = \left(\frac{\partial w(\lambda, \tau)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1(z)} \cdot \frac{d\lambda_1(z)}{dz}$; $w\left(\frac{1}{\lambda}, \tau\right)$ является производящей функцией скачка $\xi_k - \tau$. Поэтому в силу (33.2) существует единственное положительнов число λ^*, такое, что $w'_\lambda(\lambda^*, \tau) = 0$. При этом $w''_\lambda(\lambda^*, \tau) > 0$ и для любого $\tau\,(\tau_1 < \tau < \tau_2)$ $0 < \lambda_1^* < \lambda^* < \lambda_2^* < \lambda_1$.

Числа λ_1^*, λ_2^* определяются значениями τ_1 и τ_2. В точке $z_0 = \frac{1}{w(\lambda^*)}$, $z_1 = \frac{1}{w(\lambda_1^*)} < z_0 < \frac{1}{w(\lambda_2^*)} = z_2$, функция $g(z)$ имеет единственный на отрезке $[0, R]$ минимум. Так как

$$g''(z_0) = w''_\lambda(\lambda^*, \tau)\left(\frac{d\lambda_1(z)}{dz}\right)^2_{z=z_0}, \tag{34.2}$$

то равномерно по τ $g''(z_0) > g'' > 0$, $g'' = \text{const}$.

2. Пусть γ_{z_0} означает дугу окружности $|z| = z_0$, проходимую в направлении возрастания $\arg z$ от $-\frac{\theta}{2}$ до $\frac{\theta}{2}$. Если γ_{z_0} не содержит точек разветвления $\lambda_1(t)$, то определен интеграл

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}} b(z)\frac{\lambda_1^{\tau n}(z)}{z^n}\,dz,$$

где принято

$$b(z) = \frac{\lambda_1^{m-1}(z)\,\sigma_1^{(y)}(z)}{z\cdot\pi_1(z)}. \tag{35.2}$$

В силу леммы 1 везде на γ_{z_0} за исключением окрестности точки z_0

$$|g(z)| < g(z_0) - \delta_1; \tag{36.2}$$

величина $\delta_1 > 0$ зависит от размеров окрестности. Функции $g(z)$ и $b(z)$ можно считать аналитичными вдоль γ_{z_0}, так как если на γ_{z_0} окажутся точки разветвления $\lambda_1(z_0)$ (z_0 такой точкой быть не может), то можно, немного изменив путь интегрирования, обойти эти точки так, чтобы для нового пути γ'_{z_0} по-прежнему выполнялись неравенства (36.2) и

$$\sup_{\substack{\gamma'_{z_0} \\ 2 \le j \le m}} \left|\frac{\lambda_j^\tau(z)}{z}\right| < g < g(z_0),\ g = \text{const}. \tag{37.2}$$

Описанные свойства γ_{z_0} и функций $g(z)$ и $b(z)$ дают возможность применить формулы Перрона. Находим:

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = \frac{g(z_0)^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n g''(z_0)}}\left(b(z_0) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{38.2}$$

3. Остаточный член в (38.2) является равномерным по τ, так как (см. [17]) имеет место равномерная оценка для коэффициентов разложения функций $G(z) = \ln \frac{g(z)}{g(z_0)}$ и $b(z)$ в точке z_0. Действительно, выберем число δ_2 настолько малым, чтобы выполнялось: $\delta_2 < \frac{1}{2}\min(z_1, R - z_2)$ и область $\mathfrak{z}$, определенная неравенствами $\operatorname{Re} z > 0$, $z_1 - \delta_2 \leqslant |z| \leqslant z_2 + \delta_1$, $|\operatorname{Im} z| < \delta_2$, не содержала особых точек и нулей функции $\lambda_1(z)$. Тогда в силу неравенств Коши

$$\left|\frac{G^{(k)}(z_0)}{k!}\right| < \max_{\mathfrak{z}} |G(z)| \frac{1}{\delta_2^k}; \quad \left|\frac{b^{(k)}(z_0)}{k!}\right| < \max_{\mathfrak{z}} |b(z)| \cdot \frac{1}{\delta_2^k}$$

для всех τ из интервала $[\tau_1, \tau_2]$.

4. Преобразуем выражение в правой части (38.2). Положим, считая $\alpha = \text{const}$, $\tau_1 < \alpha < \tau_2$, $\tau = \alpha + \varepsilon$; где ε может принимать сколь угодно малые значения так, чтобы выполнялось (33.2). Обозначим через $\lambda(\alpha)$ точку отрезка $[0, \lambda_1]$, в которой $w(\lambda(\alpha), \alpha) = w_\alpha = \min_{\lambda > 0} w(\lambda, \alpha)$. Если $r_\alpha = \frac{1}{w(\lambda(\alpha))}$, то $z_1 < r_\alpha < z_2$ и $\lambda(\alpha) = \lambda_1(r_\alpha)$ *. Здесь $\lambda(\alpha)$ — простой корень уравнения $w'_\lambda(\lambda, \alpha) = 0$. Это значит, что функция от ε $\lambda_1(z_0)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ является аналитической по ε. Коэффициенты разложения $\lambda_1(z_0)$ в ряд определяются тождеством $\frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda^\varepsilon w(\lambda, \alpha))_{\lambda = \lambda_1(z_0)} \equiv 0$. Находим:

$$\lambda_1(z_0) = \lambda(\alpha) - \frac{w_\alpha}{\lambda(\alpha) w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\varepsilon - \left(\frac{w_\alpha}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\right)^2 \left[\frac{w'''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)} + \frac{2}{\lambda(\alpha)}\right] \frac{\varepsilon^2}{2\lambda^2(\alpha)} + \ldots . \tag{39.2}$$

Так как $\frac{d\lambda_1(z)}{dz} = -\frac{1}{z^2 w'(\lambda_1(z))}$ и $z_0 = \frac{1}{w(\lambda_1(z_0))}$, то в силу (34.2)

$$g''(z_0) = \frac{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}{[r_\alpha^2 w'(\lambda(\alpha))]^2} + O(\varepsilon); \quad b(z_0) = b(r_\alpha) + O(\varepsilon). \tag{40.2}$$

Для подстановки в (38.2) остается найти $g(z_0)$ как функцию ε. Представим $g(z_0)$ в виде

$$g(z_0) = g(r_\alpha) e^{H_\alpha(\varepsilon)}, \tag{41.2}$$

где под $H_\alpha(\varepsilon)$ понимается главное значение $\ln \frac{g(z_0)}{g(r_\alpha)}$. $H_\alpha(\varepsilon)$ аналитична в точке

---

* Во введенных обозначениях $w(\lambda) = w(\lambda, 0)$, $\lambda_1 = \lambda(0)$, $R = r_0$.

$\varepsilon = 0$. Коэффициенты ряда $H_\alpha(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\alpha k}\varepsilon^k$ могут быть найдены из соотношений $g(z) = \lambda_1^{\varepsilon}(z)\, w(\lambda_1(z), \alpha)$ и (39.2):

$$H_{\alpha 0} = H_{\alpha 1} = 0;\ H_{\alpha 2} = \frac{w_\alpha}{2\lambda^2(\alpha)\, w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)};$$

$$H_{\alpha 3} = -\left(\frac{w_\alpha}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\right)^2 \left[\frac{w'''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)} + \frac{3}{\lambda(\alpha)}\right] \frac{1}{6\lambda^3(\alpha)}.$$

Равенства (40.2), (41.2), (35.2), (32.2) дают окончательно $\sigma_1^{(y)}(r_\alpha) \neq 0$, см. § 5)

$$I_1(\tau n, \gamma_{z_0}) = \frac{\lambda^{\varepsilon n+m-1}(\alpha)\, w_\alpha^{n+1/2} \mid w'(\lambda(\alpha)) \mid \sigma_1^{(y)}(r_\alpha)}{\sqrt{2\pi n w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\, \pi_1(r_\alpha)}\, e^{nH_\alpha(\varepsilon)} \left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{42.2}$$

5. Функция $\sum_{j=2}^{m} \lambda_j^{\tau n+m-1}(z) \frac{\sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)}$ аналитична на γ_{z_0} (γ'_{z_0}) и в силу неравенства (37.2)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \sum_{j=2}^{m} \frac{\lambda_j^{\tau n+m-1}(z)\, \sigma_j^{(y)}(z)}{\pi_j(z)\, z^{n+1}}\, dz = O(g^n), \text{ где } g < g(z_0). \tag{43.2}$$

6. Положим $\tau = \frac{x}{n}$ и $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}$. Тогда $\varepsilon = \frac{x - \alpha n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$ и удовлетворяются все ограничения, наложенные на параметры τ, α, ε. Это дает возможность с помощью (42.2), (43.2) получить искомое выражение для вероятности $u_{x,n}^{(y)}$: $u_{x,n}^{(y)} = 0$, если $mn \not\equiv x + y \pmod d$ и

$$u_{x,n}^{(y)} = \frac{(-1)^y d \mid w'(\lambda(\alpha)) \mid w_\alpha^{n+1/2} \sigma_1^{(y)}(r_\alpha)\, \lambda^{\varepsilon n+m-1}(\alpha)\, e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\, \pi_1(r_\alpha)} \left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{44.2}$$

если $mn \equiv x + y \pmod d$. Суммирование $u_{x,n}^{(y)}$ по y приводит к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = \alpha$, $0 < \alpha < m$; *число* $\mathfrak{b}(mn - x)$ *определяется равенством* (31.2) *и* $\lambda(\alpha)$ *означает точку, в которой* $w(\lambda(\alpha), \alpha) = w_\alpha = \min_{\lambda > 0} w(\lambda, \alpha)$; $w(\lambda, \alpha) = \lambda^\alpha w(\lambda)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta_x = n) = \frac{d \mid w'(\lambda(\alpha)) \mid w_\alpha^{n+1/2} \lambda^{\varepsilon n+m-1}(\alpha)\, e^{nH_\alpha(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\, \pi_1(r_\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1-\mathfrak{b}(mn-x)}{d}\right]} (-1)^{\mathfrak{b}(mn-x)+kd} \sigma_1^{(\mathfrak{b}(mn-x)+kd)}(r_\alpha) \left(1 + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь $r_\alpha = \dfrac{1}{w(\lambda(\alpha))}$; $\varepsilon = \dfrac{x - \alpha n}{n}$; $H_\alpha(\varepsilon)$ — *степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях* $|\varepsilon|$

$$H_\alpha(\varepsilon) = -\frac{w_\alpha}{2\lambda^2(\alpha)\, w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\varepsilon^2 - \left(\frac{w_\alpha}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}\right)^2 \times$$

$$\times\left[\frac{w'''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)}{w''_\lambda(\lambda(\alpha), \alpha)} + \frac{3}{\lambda(\alpha)}\right]\frac{\varepsilon^3}{6\lambda^3(\alpha)} + \ldots;$$

$\tau_1(r_\alpha) = \prod\limits_{k=2}^{m}(\lambda(\alpha) - \lambda_k(r_\alpha))$ *и* $\sigma_1^{(y)}(r_\alpha)$ — *основной симметрический многочлен порядка* y *от корней* $\lambda_2(r_\alpha), \ldots, \lambda_m(r_\alpha)$ *уравнения* $w(\lambda) - w(\lambda(\alpha)) = 0$, *для которых* $|\lambda_j(r_\alpha)| < \lambda(\alpha)$, $j = 2, \ldots, m$.

При $d = 1$ в теореме можно заменить $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\sigma_1^{(k)}(r_\alpha) = e_1(r_\alpha) = \prod\limits_{k=2}^{m}(1 - \lambda_k(r_\alpha))$. Из (44.2) и утверждения теоремы видно, что в этом случае существуют

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\chi_x = y/\tau_x = n) = \frac{(-1)^y\sigma_1^{(y)}(r_\alpha)}{e_1(r_\alpha)} \tag{45.2}$$

и что, следовательно, $\dfrac{W_1(\lambda, r_\alpha)}{W_1(1, r_\alpha)}$ является производящей функцией * этих пределов.

§ 4. $x \sim mn$

Если $mn - x = X$ не зависит от n, то вероятность $\mathbf{P}(\tau_x = n)$ может быть получена как разность значений $\mathbf{P}(s_n \geqslant mn - X)$ и $\mathbf{P}(s_{n-1} \geqslant mn - X)$, вычисленных в § 5 главы 3. Поэтому в дальнейшем будет предполагаться, что $mn - x \to \infty$ при $n \to \infty$.

1. Формула (38.2), лежащая в основе вычислений предыдущего параграфа, была получена в предположении $\tau < \tau_2 < m$. Ее использование здесь

---

* Функция $\dfrac{W_2(\lambda, r_\alpha)}{\lambda^{M-1}W_2(1, r_\alpha)}$ имеет тот же смысл, но по отношению к величине первого перескока через барьер $-x$ $\left(\text{по-прежнему } r_{-\alpha} = \dfrac{1}{w(\lambda(-\alpha))}, \text{ где } \lambda(-\alpha) \text{ точка, в которой достигается } \min\limits_{\lambda>0}\lambda^{-\alpha}w(\lambda), 0 < \alpha < M\right)$. Предельное распределение (45.2) однозначно определяет параметры $\lambda_2(r_\alpha), \ldots, \lambda_m(r_\alpha)$.

невозможно уже потому, что длина дуги γ_{z_0} стремится к 0 при $z \to m$. Как и в случае $x = o(n)$ рассмотрение следует проводить в плоскости нового переменного. Положим $t = z^{\frac{1}{m}}$. Тогда после возможной перенумерации ветвей $\lambda_2(z), \ldots, \lambda_m(t)$ в окрестности точки $z = 0$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси $\operatorname{Re} z$ будем иметь

$$\lambda_j(z) = \Psi_j(t) = \Psi t \Omega^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k t^{kd} \Omega^{kd(j-1)} = \Psi t \Omega^{j-1} \Psi\,(t\Omega^{j-1}). \qquad (46.2)$$

Здесь $\Omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$; $\Psi_0 = 1$; Ψ, Ψ_k вещественны и определяются тождеством

$$t^m W(\Psi t \Psi(t)) \equiv [\Psi t \Psi(t)]^m. \qquad (47.2)$$

Обозначим

$$b_1 = \min_{\substack{p_{m-kd}>0 \\ k \neq 0}} k \text{ и при } b_1 > 1 : b_2 = \min_{\substack{p_{m-kd}>0 \\ k \neq j_1 b_1}} k,\ b_3 = \min_{\substack{p_{m-kd}>0 \\ k \neq j_1 b_1 + j_2 b_2}} k, \ldots \qquad (48.2)$$

($j_1, j_2, \ldots$ — произвольные неотрицательные целые числа).

Ясно, что если $b_1, \ldots, b_s$ — полная совокупность чисел, определяемых таким образом, то $(b_1, \ldots, b_s) = 1$. Во введенных обозначениях (47.2) дает:

$$\Psi = |p_m^{\frac{1}{m}}|; \quad \Psi_{2b_1} = \frac{\Psi^{2(b_1 d - m)}}{m}\left(p_m p_{m-2b_1 d} + p_{m-b_1 d}^2 \frac{2b_1 d - m + 1}{2m}\right);$$

$$\Psi_{b_j} = \frac{p_{m-b_j d}\Psi^{b_j d - m}}{m} \qquad j = 1, 2, \ldots, s; \ \Psi_k = 0 \ \ k \neq j_1 b_1 + \ldots + j_s b_s.$$

Пусть γ — дуга окружности, проходимая в направлении возрастания $\arg z$ от $-\frac{\theta}{2}$ до $\frac{\theta}{2}$. Радиус окружности выберем настолько малым, чтобы на γ имели место разложения (46.2). Тогда подынтегральные выражения в $I_j(\tau n, \gamma)$ можно переписать как функции t. Пользуясь соотношениями

$$\pi_j(z) = m\Psi^{m-1} t^{m-1} \Omega^{(m-1)(j-1)}\,(1 + O(t^{b_1 d})),$$

находим

$$\sigma_j(z) = (-1)^y \Psi^y t^y \Omega^{y(j-1)}\,(1 + O(t^{b_1 d})),$$

$$I_j(\tau n, \gamma) = \widetilde{I}_j(\tau n, \widetilde{\gamma}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} \left(\frac{\Psi_j^{\tau}(t)}{t^m}\right)^n c_j(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}\Omega^{j-1}} \left(\frac{\Psi_1^{\tau}(t)}{t^m}\right)^n c_1(t)\,dt, \qquad (49.2)$$

где $\widetilde{\gamma}$ — образ дуги γ и $c_j(t)$ аналитические вдоль $\widetilde{\gamma}$ функции, равные в окрестности точки $t = 0$:

$$c_j(t) = (-1)^y \Psi^y t^{y-1} \Omega^{y(j-1)}\,(1 + O(t^{b_1 d})). \qquad (50.2)$$

2. Пусть далее ε — действительный, положительный параметр, который

может принимать сколь угодно малые значения. Положим $\tau = m - \varepsilon$. Точки перевала для

$$\ln \frac{\Psi_1^{m-\varepsilon}(t)}{t^m \Psi^{m-\varepsilon}} = \ln \frac{\Psi^{m-\varepsilon}(t)}{t^\varepsilon} \tag{51.2}$$

очевидно, являются нулями функции

$$(m-\varepsilon)\frac{\Psi'(t)\cdot t}{\Psi(t)} - \varepsilon. \tag{52.2}$$

Эта функция аналитична по ε и t^d. Свободный коэффициент в разложении ее по степеням ε и t^d равен 0, а наименьшая степень t^d, при которой коэффициент отличен от нуля, равна b_1. В силу известных теорем анализа нули для (52.2), которые мы обозначим через t_0^d, в точке $\varepsilon = 0$ разлагаются в ряд по степеням ε^{1/b_1}:

$$t_0^d = a_0 \varepsilon^{1/b_1}(1 + a_1 \varepsilon^{1/b_1} + a_2 \varepsilon^{2/b_1} + \dots),$$

$$a_0 = \left| \left(\frac{1}{m b_1 d \Psi_{b_1}} \right)^{1/b_1} \right|, \quad a_{b_2 - b_1} = -\frac{b_2 \Psi_{b_2} a_0^{b_2 - b_1}}{b_1^2 \Psi_{b_1}}, \dots \tag{53.2}$$

$$a_{b_1} = \frac{(b_1 d + 1)\Psi_{b_1}^2 - 2\Psi_{2b_1}}{m b_1^2 d \Psi_{b_1}^2}, \quad a_k = 0 \text{ при } 1 \leqslant k < \min(b_1, b_2 - b_1).$$

Следовательно, при достаточно малом ε функция (51.2) будет иметь $b_1 d$ точек перевала, координаты которых указываются соотношениями (53.2).

Возьмем теперь в качестве $\widetilde{\gamma}$ дугу $\widetilde{\gamma}_{t_0}$ окружности радиуса $t_0 = |(t_0^d)^{\frac{1}{d}}|$ (t_0^d взято при арифметическом значении ε^{1/b_1}), и в интеграле (49.2) сделаем замену $t = t_0 e^{i\varphi}$. Если принять при этом $f(\varphi, \varepsilon) = \ln \Psi^{m-\varepsilon}(t_0 e^{i\varphi}) e^{-i\varphi\varepsilon}$ (главное значение), то получим

$$\widetilde{I}_j(\tau n, \widetilde{\gamma}_{t_0}) = \frac{\Psi^{n(m-\varepsilon)}}{2\pi t_0^{\varepsilon n - 1}} \int_{\frac{2\pi}{m}\left(j-1-\frac{1}{2d}\right)}^{\frac{2\pi}{m}\left(j-1+\frac{1}{2d}\right)} e^{nf(\varphi,\varepsilon)+i\varphi} c_1(t_0 e^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{54.2}$$

Функции $f(\varphi, \varepsilon)$ и $c_1(t_0 e^{i\varphi})$ при достаточно малом t_0 будут аналитическими по φ вдоль всего пути интегрирования.

3. Все $b_1 d$ точек перевала функции (51.2) лежат вблизи окружности радиуса t_0 и имеют аргументы, близкие к $\frac{2\pi k}{b_1 d}$; $k = 0, 1, \dots, b_1 d - 1$. Естественно ожидать поэтому, что при вычислении интегралов $\widetilde{I}_j(\tau n, \widetilde{\gamma}_{t_0})$ существенными окажутся лишь те значения φ, принадлежащие интервалам

$$\left(\frac{2\pi}{m}\left(j-1-\frac{1}{2d}\right), \frac{2\pi}{m}\left(j-1+\frac{1}{2d}\right)\right) \quad j=1, 2, \ldots, m, \qquad (55.2)$$

которые лежат в окрестностях точек $\varphi=\frac{2\pi k}{b_1 d}$ $k=0, 1, \ldots, b_1 d-1$.

Пусть $(b_1, m)=B_1$, $\beta_1=\frac{b_1}{B_1}$ и $\theta_1=\frac{2\pi}{b_1 d}$. Тогда для того, чтобы окрестность точки $\theta_1 k$ пересекалась с интервалами (55.2), необходимо и достаточно, чтобы k было решением сравнения $km\equiv\nu B_1 \pmod{b_1 d}$ при $-\left[\frac{\beta_1}{2}\right]\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{\beta_1}{2}\right]$. Другими словами, k должно принадлежать совокупности K_1 чисел

$$\{\nu k_1+j\beta_1 d\} \text{ при } \nu=-\left[\frac{\beta_1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{\beta_1}{2}\right] \text{ и } j=0, 1, \ldots, B_1-1, (56.2)$$

где k_1 — решение сравнения $k\frac{m}{B_1}\equiv 1 \pmod{\beta_1 d}$. Если β_1 нечетно, то все точки $\varphi=\theta_1 k$, соответствующие этой совокупности, являются внутренними точками интервалов (55.2). Если же β_1 четно, то точки $\varphi_k=\theta_1 k$, соответствующие подсовокупности $K_2=\left\{\pm\frac{\beta_1 k_1}{2}+j\beta_1 d\right\}$ $(j=0, 1, \ldots, B_1-1)$, оказываются граничными точками интервалов из (55.2). Характер совокупностей K_1, K_2 выясняет

Лемма 2. *Числа совокупности K_1 пробегают полную систему вычетов по модулю b_1. Дважды пробегаются лишь вычеты, соответствующие числам подсовокупности K_2.*

Доказательство. Рассмотрим сравнение

$$\nu k_1+j\beta_1 d\equiv l \pmod{b_1} \text{ при произвольном } l. \qquad (57.2)$$

Если ν_1 решение, то необходимо $\nu_1 k_1\equiv l \pmod{\beta_1}$. Так как $(k_1, \beta_1)=1$, то любое решение (57.2) по ν лежит среди чисел $\nu_1, \nu_1+\beta_1, \ldots, \nu_1+(B_1-1)\beta_1$. С другой стороны, для любого из этих чисел существует ровно β_1 решений (57.2) по j, не различимых по модулю B_1. Поэтому всегда найдется единственное решение, у которого $0\leqslant j\leqslant B_1-1$, а ν принадлежит, например интервалу $-\frac{\beta_1}{2}+1\leqslant\nu\leqslant\frac{\beta_1}{2}$, если β_1 четно, и интервалу $-\left[\frac{\beta_1}{2}\right]\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{\beta_1}{2}\right]$, если β_1 нечетно.

4. Обозначим через K_1-K_2 разность множеств K_1 и K_2 и при $k\in K_1-K_2$ рассмотрим окрестность точки $\varphi=\theta_1 k$. Выберем число $\delta<\frac{\pi}{mb_1 d}$ непревосходящим радиусов сходимости рядов функций $f(\varphi, \varepsilon)$ и $c_1(t_0 e^{i\varphi})$ в точке $\varphi=\theta_1 k$ и вычислим

$$I(|\varphi-\theta_1 k|<\delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1 k-\delta}^{\theta_1 k+\delta} e^{nf(\varphi, \varepsilon)+i\varphi} c_1(t_0 e^{i\varphi})\, d\varphi=$$

$$=\frac{e^{i\theta_1 k}}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} e^{nf(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)+i\varphi} c_1(t_0 e^{i(\theta_1 k+\varphi)})\, d\varphi.$$

Положим $\tilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)=f(\theta_1 k, \varepsilon)+\varepsilon\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)$. В области $|\varphi|\leqslant\delta$ $\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)$ аналитична и ограничена при $\varepsilon\to 0$. Имеем (используя равенство $\varepsilon=(m-\varepsilon)\dfrac{\Psi'(t_0)\,t_0}{\Psi(t_0)}$):

$$\widetilde{f}'_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon)=ib^{(k)}md\Psi_{b^{(k)}}\frac{t_0^{b^{(k)}d}}{\varepsilon}\left(e^{i\theta_1 kb^{(k)}d}-1\right)(1+O(\varepsilon^{1/b_1})),\ \operatorname{Re}\widetilde{f}'_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon)=0, \tag{58.2}$$

где при $k\neq 0$

$$b^{(k)}=\min_{\substack{2\leqslant j\leqslant s\\ kb_j\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ b_1)}} b_j \text{ и } b^{(0)}=0. \tag{59.2}$$

Далее, разложение функции $\ln\Psi^{m-\varepsilon}(t_0e^{i(\theta_1 k+\varphi)})$ в ряд по степеням $t_0e^{i(\theta_1 k+\varphi)}$ показывает, что при $j\geqslant 2$

$$\widetilde{f}^{(j)}_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon)=i\,(ib_1 d)^{j-1}+O(\varepsilon^{1/b_1}). \tag{60.2}$$

Кроме того, найдется $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}$ такое, что равномерно по ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ $\left|\dfrac{\widetilde{f}^{(j)}_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon)}{j!}\right|\leqslant\max\limits_{\substack{\varepsilon<\varepsilon_0\\ |\varphi|=\delta}}|\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)|\,\dfrac{1}{\delta^j}$. Дополнительно к сказанному числа ε_0 и δ будем считать настолько малыми, чтобы при $\varepsilon<\varepsilon_0$ выполнялись все ограничения, наложенные на малость t_0, а отрезок $[-\delta, \delta]$ полностью лежал в секторах, где $\operatorname{Re}\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)<0$ (точка $\varphi=0$ является точкой перевала для $\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)$ только при $k=0$; см. (58.2)). Интеграл $I(|\varphi-\theta_1 k|<\delta)$ перепишем в виде

$$I(|\varphi-\theta_1 k|<\delta)=\frac{e^{n\tilde{f}(\theta_1 k, \varepsilon)+i\theta_1 k}}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\exp\{\varepsilon n[\widetilde{f}(\theta_1 k+\varphi, \varepsilon)-\varphi\widetilde{f}'_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon)]+$$

$$+\varphi(i+\varepsilon n\widetilde{f}'_{\varphi}(\theta_1 k, \varepsilon))\}\,c_1(t_0e^{i(\theta_1 k+\varphi)})\,d\varphi. \tag{61.2}$$

Пусть $\varepsilon n\to\infty$ при $n\to\infty$. Положим сначала $k=0$. Тогда, как показывает (61.2), произведение εn можно рассматривать как новый неограниченно возрастающий параметр. Это замечание и установленные свойства функции $\widetilde{f}(\varphi, \varepsilon)$ позволяют использовать метод перевала, что дает (см. [17] и §§ 2—3 настоящей главы): при $n\to\infty$ и $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$I(|\varphi|<\delta)=\frac{c_1(t_0)\,e^{n\tilde{f}(0, \varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon n|\widetilde{f}''_{\varphi}(0, \varepsilon)|}}\left(1+O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)\right)$$

или, учитывая (50.2), (53.2), (60.2):

$$I(|\varphi|<\delta)=\frac{(-1)^{\nu}\Psi^{\nu}}{\sqrt{2\pi\varepsilon nb_1 d}}\left(\frac{\varepsilon}{mb_1 d\Psi_{b_1}}\right)^{\frac{\nu-1}{b_1 d}}\Psi^{n(m-\varepsilon)}(t_0)\left(1+O(\varepsilon^{1/b_1})+O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)\right).$$

Под дробной степенью здесь понимается арифметическое значение. Разложение для функции $\Psi^{m-\varepsilon}(t_0)$, представимой в виде ряда по степеням ε^{1/b_1} будет приведено ниже.

Используя тот факт, что порядки малости величин $\operatorname{Re} f(\theta_1 k, \varepsilon) - f(0, \varepsilon)$ и $\varepsilon \widetilde{f}'_\varphi(\theta_1 k, \varepsilon)$ совпадают, интегрирование (61.2) для $k \neq 0$ можно провести аналогичным образом. Действительно, имеем: либо $n\varepsilon^{b^{(k)}/b_1} \to \infty$, а тогда

$$|\Psi^{m-\varepsilon}(t_0 e^{i\theta_1 k})|^n < |\Psi^{m-\varepsilon}(t_0)|^n \exp(-An\varepsilon^{b^{(k)}/b_1})$$

и

$$|I(|\varphi - \theta_1 k| < \delta)| = I(|\varphi| < \delta) \cdot O(\exp(-An\varepsilon^{b^{(k)}/b_1}))$$

при некотором $A > 0$; либо $n\varepsilon^{b^{(k)}/b_1}$ ограничено и тогда функция $e^{\varphi(i+\varepsilon n\widetilde{f}'_\varphi(\theta_1 k, \varepsilon))}$ в интеграле (61.2) наряду с $c_1(t_0 e^{i(\theta_1 k+\varphi)})$ может рассматриваться как функция, слабо зависящая от параметра εn (каждый раз, как только фиксируется зависимость ε от n). Метод перевала дает тогда

$$I(|\varphi - \theta_1 k| < \delta) = \frac{e^{i\theta_1 k + nf(\theta_1 k, \varepsilon)} c_1(t_0 e^{i\theta_1 k})}{\sqrt{2\pi\varepsilon n\, |\widetilde{f}''_\varphi(\theta_1 k, \varepsilon)|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^y \Psi^y e^{i\theta_1 k(y-\varepsilon n)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon n b_1 d}} \left(\frac{\varepsilon}{m b_1 d \Psi_{b_1}}\right)^{\frac{y-1}{b_1 d}} \Psi^{n(m-\varepsilon)}(t_0 e^{i\theta_1 k}) \left(1 + O(\varepsilon^{1/b_1}) + O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)\right).$$

Так как $(n\varepsilon^{b^{(k)}/b_1}$ ограничено)

$$\left(\frac{\Psi(t_0 e^{i\theta_1 k})}{\Psi(t_0)}\right)^{n(m-\varepsilon)} = \exp\{-mn(1 - e^{i\theta_1 k b^{(k)} d}) \Psi_{b^{(k)}} \varepsilon^{b^{(k)}/b_1}\}(1 + O(\varepsilon^{1/b_1})),$$

что можно записать:

$$I(|\varphi - \theta_1 k| < \delta) = I(|\varphi| < \delta) \exp\{-i\theta_1 k(\varepsilon n - y) -$$

$$- mn(1 - e^{i\theta_1 k b^{(k)} d}) \Psi_{b^{(k)}} \varepsilon^{b^{(k)}/b_1}\} \left(1 + O(\varepsilon^{1/b_1}) + O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)\right).$$

5. Если подсовокупность K_2 не пуста и k принадлежит ей, то следует вычислять

$$I(0 < \varphi - \theta_1 k < \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1 k}^{\theta_1 k + \delta} e^{nf(\varphi, \varepsilon) + i\varphi} c_1(t_0 e^{i\varphi})\, d\varphi, \text{ если } k = \frac{\beta_1 k_1}{2} + j\beta_1 d$$

$$j = 0, 1, \ldots, B_1 - 1,$$

и $I(-\delta < \varphi - \theta_1 k < 0)$, если $k = -\frac{\beta_1 k_1}{2} + j\beta_1 d \quad j = 0, 1, \ldots, B_1 - 1.$

Аналогично предыдущему получим

$$I(0<\varphi-\theta_1 k<\delta)=\frac{1}{2}I(|\varphi|<\delta)\exp\{-i\theta_1 k(\varepsilon n-y)-$$

$$-mn(1-e^{i\theta_1 kb^{(k)}d})\Psi_{b^{(k)}}\varepsilon^{b^{(k)}/b_1}\}\left(1+O(\varepsilon^{1/b_1})+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)\right).$$

Таким же будет выражение и для $I(-\delta<\varphi-\theta_1 k<0)$.

6. Таким образом, вычислены значения интегралов по всем пересечениям окрестностей точек $\varphi=\theta_1 k$ $k=0, 1, \ldots, b_1 d-1$ с интервалами (55.2). Для получения значений $u_{x,n}^{(y)}$ остается рассмотреть интегралы по дугам (55.2), не содержащим указанных окрестностей. Пусть максимум (или один из максимумов) отношения $\frac{|\Psi(t_0 e^{i\varphi})|}{\Psi(t_0)}$ на дугах (55.2) с вырезанными окрестностями достигается при $\varphi=\varphi_0$. Наименьшее возможное расстояние, отделяющее точку φ_0 от точек $\varphi=\theta_1 k$ $k=0, 1, \ldots, b_1 d-1$ равно $\delta<\frac{\pi}{mb_1 d}$. Поэтому $\varphi_0 b_1 d$ не кратно 2π и отличается от ближайшего числа кратного 2π на конечную величину, превосходящую или равную $\delta b_1 d$. Так что $\cos\varphi_0 b_1 d\leqslant\cos\delta b_1 d$. В силу (57.2)

$$\left|\frac{\Psi^{m-\varepsilon}(t_0 e^{i\varphi_0})}{\Psi^{m-\varepsilon}(t_0)}\right|=|1-\Psi_{b_1}t_0^{b_1 d}(1-e^{i\varphi_0 b_1 d})+o(t_0^{b_1 d})|=$$

$$=1-\frac{\varepsilon}{b_1 d}(1-\cos\varphi_0 b_1 d)+o(\varepsilon).$$

Поэтому, начиная с некоторого, достаточно малого ε $|\Psi^{n(m-\varepsilon)}(t_0 e^{i\varphi})|<$ $<\Psi^{n(m-\varepsilon)}(t_0)e^{-\frac{\varepsilon n}{2b_1 d}(1-\cos\delta b_1 d)}$, если только φ принадлежат интервалам (55.2) и не лежит в δ — окрестностях точек $\varphi=\theta_1 k$ $k=0, 1, \ldots, b_1 d-1$. Оценка интегралов, соответствующих таким значениям φ дает $O\left(\frac{1}{\varepsilon n}I(|\varphi|<\delta)\right)$.

7. Обозначим

$$m(n, \varepsilon, y, d, b_1, \ldots, b_s)=$$

$$=\sum_{k\in K_1}\delta(k)\exp\{-i\theta_1 k(\varepsilon n-y)-mn(1-e^{i\theta_1 kb^{(k)}d})\Psi_{b^{(k)}}\varepsilon^{b^{(k)}/b_1}\},\quad(62.2)$$

где $\delta(k)=\begin{cases}1, & \text{если } k\in K_1-K_2\\ 1/2, & \text{если } k\in K_2.\end{cases}$

Функция $m(n, \varepsilon, y, d, b_1, \ldots, b_s)$ вещественна и может быть подсчитана с помощью леммы 2. Используя равенство (54.2) получим, что при $y\equiv\varepsilon n\pmod d$

$$u^{(y)}_{\tau n,n} = \frac{(-1)^y d\Psi^{n(m-\varepsilon)}}{t_0^{\varepsilon n-1}} I(|\varphi|<\delta)\left\{m(n,\varepsilon,y,d,b_1,\ldots,b_s)+\right.$$

$$\left.+O(\varepsilon^{1/b_1})+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\sqrt{d}\cdot p_m^n}{\sqrt{2\pi\varepsilon n b_1}}\left(\frac{b_1 d p_{m-b_1 d}}{\varepsilon p_m}\right)^{\frac{\varepsilon n-y}{b_1 d}} F^n(\varepsilon)\left\{m(n,\varepsilon,y,d,b_1,\ldots,b_s)+\right.$$

$$\left.+O(\varepsilon^{1/b_1})+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)\right\}, \qquad (63.2)$$

где $F(\varepsilon)=\Psi^{m\cdot\varepsilon}(t_0)$ — функция ε, разлагающаяся в ряд по степеням ε^{1/b_1}:

$$F(\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{b_1 d}+\varepsilon^2\frac{(m-b_1 d)\,p^2_{m-b_1 d}-p_m p_{m-2b_1 d}}{(b_1 d p_{m-b_1 d})}+\ldots$$

$$\ldots+\varepsilon^{b_2/b_1}\frac{b_2-b_1}{b_1}\,p_m^{\frac{b_2-b_1}{b_1}}\frac{p_{m-b_2 d}}{(b_1 d p_{m-b_1 d})^{b_2/b_1}}+\ldots. \qquad (64.2)$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $x\sim mn$, $\varepsilon n = mn-x\to\infty$ *и* b_j *— числа, определенные равенствами* (48.2). *Тогда*

$$\mathbf{P}(\tau_x=n)=\frac{\sqrt{d}\,p_m^n}{\sqrt{2\pi\varepsilon n b_1}}\left(\frac{b_1 d p_{m-b_1 d}}{\varepsilon p_m}\right)^{\frac{\varepsilon n-\mathfrak{b}(\varepsilon n)}{b_1 d}} F^n(\varepsilon)\left\{m(n,\varepsilon,\mathfrak{b}(\varepsilon n),d,b_1,\ldots,b_s)+\right.$$

$$\left.+O(\varepsilon^{1/b_1})+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)\right\}.$$

Если $m(n,\varepsilon,\mathfrak{b}(\varepsilon n),d,b_1,\ldots,b_s)\to 0$ *при* $n\to\infty$, *то главную часть* $\mathbf{P}(\tau_x=n)$ *следует искать с помощью соотношений* $\mathbf{P}(\tau_x=n)=\sum\limits_y u^y_{x,n}$ *и* (63.2). *Вид функций* $F(\varepsilon)$ *и* $m(n,\varepsilon,y,d,b_1,\ldots,b_s)$ *дается соответственно в* (64.2) *и в* (56.2), (59.2), (62.2); $\mathfrak{b}(\varepsilon n)=$ вычет $\varepsilon n\ (\mathrm{mod}\,d)$.

В заключение перечислим ряд простейших свойств функции $m(n,\varepsilon,y,d,b_1,\ldots,b_s)$.

а) $m(n,\varepsilon,y,d,1)=1$.

б) При $n\varepsilon^{b_2/b_1}\to\infty$ $m(n,\varepsilon,y,d,b_1,b_2)=1+O(e^{-An\varepsilon^{b_2/b_1}})$, $A>0$ (при $s=2b^{(k)}=b_2$ при любом $k\in K_1$, $k\neq 0$).

в) При $n\varepsilon^{b_2/b_1} \to 0$ в $m(n, \varepsilon, y, d, b_1, \ldots, b_s)$ становятся заметными провалы при $\varepsilon n - y$, не кратном $b_1 d$.

г) При $d = 1$ $m(n, \varepsilon, y, 1, b_1, \ldots, b_s) = \sum_{k=0}^{b_1-1} \exp\{-i\theta_1 k(\varepsilon n - y) - mn \times$ $\times (1 - e^{i\theta_1 k b^{(k)}}) \Psi_{b^{(k)}} \varepsilon^{b^{(k)}/b_1}\}$ и остаточный член $O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon n}}\right)$ в $\mathbf{P}(\eta_x = n)$ следует заменить на $O\left(\frac{1}{\varepsilon n}\right)$ (все точки перевала будут внутренними точками промежутков интегрирования). В частности при $n\varepsilon^{b_2/b_1} \to 0$

$$m(n, \varepsilon, y, 1, b_1, \ldots, b_s) = \begin{cases} b_1 + O(n\varepsilon^{b_2/b_1}) & \varepsilon n - y \equiv 0 \pmod{b_1} \\ O(n\varepsilon^{b_2/b_1}) & \varepsilon n - y \not\equiv 0 \pmod{b_1}. \end{cases}$$

§ 5. Дополнения

1°. Моменты для * η_x могут быть найдены дифференцированием производящей функции для η_x, равной

$$u_x(z) = \sum_{y=0}^{m-1} u_x^{(y)}(z) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1}(z) \frac{e_j(z)}{\pi_j(z)}, \quad e_j(z) = \prod_{k=1, k\neq j} (1 - \lambda_k(z)). \quad (65.2)$$

Другой способ отыскания моментов состоит в решении конечно-разностных уравнений для производных от $u_x(z)$ при $z = 1$.

Обозначим для краткости: $\mu_j = \lambda_j(1)$, $\Pi_j = \pi_j(1)$, $S_j^{(y)} = \sigma_j^{(y)}(1)$, $E_j = e_j(1)$; $j = 1, 2, \ldots, m$ (μ_1 — наименьший положительный корень уравнения $w(\lambda) - 1 = 0$; $\mu_2, \ldots, \mu_m$ — все корни этого уравнения, для которых $|\mu_j| < \mu_1$). Простоты ради числа $\mu_2, \ldots, \mu_m$ будем считать различными. В силу (65.2) вероятность того, что блуждающая частица когда-либо поглотится экраном в точке x, равна $\mathbf{P}(\eta_x < \infty) = u_x(1) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{E_j}{\Pi_j}$.

Если $a \geqslant 0$, то $\mu = 1$ и $\mathbf{P}(\eta_x < \infty) = 1$.

Определим распределение случайной величины η_x' равенством $\mathbf{P}(\eta_x' = n) = \frac{\mathbf{P}(\eta_x = n)}{\mathbf{P}(\eta_x < \infty)}$. Дифференцируя $u_x(z)$, найдем значение условного математического ожидания η_x при условии, что η_x конечно $\left(\frac{d\lambda_j(z)}{dz} = -\frac{1}{z^2 w'(\lambda_j(z))}\right)$:

$$\mathbf{M}\eta_x' = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-2} \frac{E_j}{\Pi_j} \left(-\frac{x+m-1}{w'(\mu_j)} + \mu_j(A_j + B_j)\right)}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{E_j}{\Pi_j}},$$

---

* Из (2) следует, что при $a > 0$ и $x \to \infty$ $\mathbf{M}\eta_x \sim \frac{x}{a}$, $\mathbf{D}\eta_x \sim \frac{x\sigma^2}{a^3}$.

где *

$$A_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{m} \frac{1}{(1-\mu_k)w'(\mu_k)}, \quad B_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{m} \frac{1}{(\mu_j-\mu_k)}\left(\frac{1}{w'(\mu_j)} - \frac{1}{w'(\mu_k)}\right).$$

В частности, при $a>0$ и $x\to\infty$:

$$\mathbf{M}\eta_x' = \mathbf{M}\eta_x = \frac{x}{a} - \frac{1}{a}\sum_{j=2}^{m}\frac{\mu_j}{1-\mu_j} + O(|\mu_2|^x).$$

Повторное дифференцирование $u_x(z)$ дает чрезвычайно громоздкое выражение. Поэтому обратимся к уравнению (4.2). Дважды дифференцируя его, получим, что $u_x''(1)$ удовлетворяет уравнению

$$u_x''(1) = 2(u_x'(1) - u_x(1)) + \sum_{j=-M}^{m} p_j u_{x-j}''(1) \qquad (66.2)$$

при начальных условиях $u_0''(1) = \ldots = u_{-m+1}''(1) = 0$. Так как $u_x'(1) - u_x(1)$ представимо в виде $\sum_{j=1}^{m}\mu_j^x(x\bar{\alpha}_j + \bar{\beta}_j)$, то частным решением (66.2) является функция $v_x = \sum_{j=1}^{m}\mu_j^x(x^2\alpha_j + x\beta_j)$

при $\alpha_j = -\frac{\bar{\alpha}_j}{\mu_j w'(\mu_j)}$, $\beta_j = \frac{\bar{\alpha}_j}{w'(\mu_j)}\left(\frac{w''(\mu_j)}{w'(\mu_j)} + \frac{1}{\mu_j}\right) - \frac{2\bar{\beta}_j}{\mu_j w'(\mu_j)}$,

что дает возможность найти: $u_x''(1) = \sum_{j=1}^{m}\mu_j^x(\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j)$,

где $\gamma_j = -\frac{\Delta_j}{\Delta}$, Δ — определитель Вандермонда для чисел $\frac{1}{\mu_1}, \ldots, \frac{1}{\mu_m}$ и Δ_j — определитель, полученный из Δ, заменой j столбца столбцом $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_{-1} \\ \vdots \\ v_{-m+1} \end{pmatrix}$. Значения $u_x''(1), u_x'(1), u_x(1)$ определяют дисперсию $\mathbf{D}\eta_x'$. При большом x находим:

$$\mathbf{D}\eta_x' = -\frac{x}{\mu_1^2(w'(\mu_1))^3}[\mu_1 w''(\mu_1) - \mu_1(w'(\mu_1))^2 + w'(\mu_1)] +$$

$$+ \frac{\gamma_1\Pi_1}{\mu_1^{m-1}E_1} + A_1 + B_1 - \frac{m-1}{\mu_1 w'(\mu_1)} - \left(A_1 + B_1 - \frac{m-1}{\mu_1 w'(\mu_1)}\right)^2 + O\left(x^2\left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^x\right).$$

При $a>0$ это дает

$$\mathbf{D}\eta_x' = \mathbf{D}\eta_x = \frac{x\sigma^2}{a^3} + \gamma_1 - \frac{1}{a}\left(\sum_{j=2}^{m}\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\sum_{j=2}^{m}\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\right)^2 + O(x^2|\mu_2|^x).$$

Последующие моменты η_x' могут быть найдены подобным образом.

---

* При $a>0$, $j>1$ неопределенность $E_j A_j$ понимается как $-\frac{1}{a}\prod_{k=2, k\neq j}(1-\mu_k)$.

2°. Распределение χ_x при условии, что $\eta_x < \infty$. Вероятность $v_{x,y} = \mathbf{P}(\eta_x < \infty,\ \chi_x = y)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{x,y} = \sum_{j=M}^{m} p_j v_{x-j,y} \text{ при } x > 0,$$

условию $v_{x,y} < 1$ для $x > 0$ и начальным условиям: $v_{-y,y} = 1$, $v_{x,y} = 0$ $0 \geqslant x \geqslant -m+1$, $x \neq -y$. Это дает сразу:

$$v_{x,y} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{(-1)^y S_j^{(y)}}{\Pi_j} \qquad (S_j^{(y)} = \sigma_j^{(y)}(1));$$

$$\mathbf{P}(\chi_x = y/\eta_x < \infty) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{(-1)^y S_j^{(y)}}{\Pi_j}}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j^{x+m-1} \frac{E_j}{\Pi_j}}.$$

Откуда, в частности, $\lim\limits_{x\to\infty} \mathbf{P}(\chi_x = y/\eta_x < \infty) = \dfrac{(-1)^y S_i^{(y)}}{E_1}$. Или, что то же: $\dfrac{W_1(\lambda,1)}{W_1(1,1)}$ является производящей функцией для пределов $\lim\limits_{x\to\infty} \mathbf{P}(\chi_x = y/\eta_x < \infty)$. Последние однозначно определяют числа $\mu_2, \ldots, \mu_m$ *.

3°. Доказательство положительности $(-1)^y \dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1} \dfrac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right)$ и $(-1)^y \sigma_1^{(y)}(r_a)$. В § 2 было доказано, что в условиях п. А теоремы 1

$$u_{x,n}^{(y)} = c(n, x, y) \frac{1}{n^{3/2} R^n} + O\left(\frac{1}{n^{5/2} R^n}\right), \tag{67.2}$$

где $c(n, x, y) = \begin{cases} c \cdot c(x, y) & mn \equiv x + y \pmod d \\ 0 & mn \not\equiv x + y \pmod d, \end{cases}$ $c > 0$ постоянно и

$$c(x, y) = (-1)^y \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1} \frac{\sigma_j^{(y)}}{\pi_j}\right); \tag{68.2}$$

$\lambda_1 \psi_1 c(x, y)$ является коэффициентом при $-\sqrt{R - z}$ в разложении $u_x^{(y)}(z)$ около точки R; z — положительно, $z \leqslant R$. Так как $u_x^{(y)}(z)$ монотонно возрастает по z, то $c(x, y) \geqslant 0$. В силу (3.2) функция $v_{x,n}^{(y)} = \sum\limits_{k=0}^{d-1} u_{x,n+k}^{(y)}$ при $n > 0$ удовлетворяет условиям $v_{0,n}^{(y)} = \ldots = v_{-m+1,n}^{(y)} = 0$. Из (67.2) видно,

---

* Так как при $a > 0$ $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{1-\mu_j} = \mathbf{M}\chi_x + O(|\mu_2|^x)$, то $M\tau_{ix}$ можно записать в виде: $M\tau_{ix} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{a}(m - 1 - M\chi_x) + O(|\mu_2|^x)$. Подобный смысл можно придать формулам и для других моментов τ_{ix}.

то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_{x,n}^{(y)} R^n n^{3/2}}{c}$ существует и равен $c(x, y)$. Поэтому

$$c(0, y) = c(-1, y) = \ldots = c(-m+1, y) = 0. \tag{69.2}$$

Таким образом, $c(x, y)$ представима в виде $c(y)\, x\lambda_1^x + \sum_{j=1}^{m}{}' c_j(y)\, \lambda_j^x$ и удов-

летворяет m условиям (69.2). Предположив существование $x > 0$ такого, то $c(x, y) = 0$, в силу линейной независимости функций $x\lambda_1^x, \lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, \lambda_m^x$ немедленно получим, что $c(x, y) \equiv 0$ для всех x. Это противоречит (68.2).

Рассмотрим теперь $(-1)^y \sigma_1^{(y)}(z)$, $0 < z \leqslant R$. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших x будет иметь место неравенство $u_x^{(y)}(z) < \lambda_1^{x+m-1}(z) \times$ $\times \left(\dfrac{(-1)^y \sigma_1^{(y)}(z)}{\tau_1(z)} + \varepsilon \right)$. Так как $\tau_1(z)$ всегда положительно, то отсюда следует, что $(-1)^y \sigma_1^{(y)}(z) \geqslant 0$, $\sigma_1^{(y)}(z)$ — аналитическая функция вдоль $(0, R]$. Допустим, что в точке z_1 $\sigma_1^{(y)}(z) = 0$. Тогда найдется $z_2 < z_1$ такое, что $(-1)^y \sigma_1^{(y)}(z_2) > 0$ и $|\lambda_1(z_2)| > |\lambda_2(z_1)|$. Поэтому при некотором c_1 не зависящем от x будет выполняться

$$\frac{u_x^{(y)}(z_1)}{u_x^{(y)}(z_2)} < c_1 \left| \frac{\lambda_2(z_1)}{\lambda_1(z_2)} \right|^x.$$

Следовательно, для достаточно больших x $u_x^{(y)}(z_1) < u_x^{(y)}(z_2)$; $z_1 > z_2$, что невозможно, так как $u_x^{(y)}(z)$ монотонно возрастает. Положительность $(-1)^y \sigma_1^{(y)}(r_2)$ доказана.

4. Запретные индексы. При рассмотрении задач, связанных со случайными блужданиями, могут быть также использованы так называемые запретные индексы. Впервые они появились, по-видимому, в работе Джуна [22]. С их помощью может быть указан еще один способ отыскания $u_x^{(y)}(z)$. Рассмотрим последовательность целых чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ таких, что из точки j можно попасть в j, не заходя ни в одну из точек $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$. Обозначим при $n \geqslant 1$:

$$_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_l}p_{kj}^{(n)} = \mathbf{P}(s_n = j, \quad s_r \neq \nu_q \quad r = 1, \ldots, n-1, \quad q = 1, \ldots, l \,/\, s_0 = k) \tag{70.2}$$

$$_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_l}p_{kj}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_l}p_{kj}^{(n)} z^n.$$

Тогда формула полной вероятности по последнему попаданию в точку ν дает: $p_{kj}(z) = p_{k\nu}(z)\, {}_{\nu}p_{\nu j}(z) + {}_{\nu}p_{kj}(z)$. Откуда находим:

$${}_{\nu}p_{kj}(z) = \frac{1}{1 + p_{\nu\nu}(z)} \begin{vmatrix} p_{kj}(z) & p_{k\nu}(z) \\ p_{\nu j}(z) & 1 + p_{\nu\nu}(z) \end{vmatrix}.$$

Эта формула сохранится, если у всех производящих функций подставить

еще один запретный индекс. Производя нужное число раз необходимую итерацию, получим значение $_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_l}p_{kj}(z)$ для любого заданного набора индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$*. Остается заметить, что**

$$U_x^{(y)}(z) = {}_{x,x+1,\ldots,x+m-1}p_{0,x+y}(z).$$

Поступила в редакцию
15.7.59.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. L. Chung, Asimptotic distribution of the maximum cumulative sums of independent random variables, Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 12 (1948).
[2] P. Erdos and M. Kac, On certain limit theorems of the theory of probability, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, 4 (1946).
[3] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен. **I**, 2, (1956).
[4] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли, ДАН СССР, **108**, 2, (1956).
[5] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1952.
[6] A. Wald, On cumulative sums of random variables, Ann. Math. Statist., **15**, (1944) 283.
[7] A. Wald, Sequental analysis, New York, 1947.
[8] R. Otter, The multiplicative process, Ann. Math. Statist., **20**, 2, (1949).
[9] А. А. Боровков, Некоторые задачи больших уклонений максимума сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, ДАН СССР, **121**, 2 (1958)
[10] A. A. Anis and E. H. Lloyd, On the range of partial sums of a finite number of independent normal variables, Biometrica, **40**, 1—2 (1953).
[11] A. A. Anis, The variance of the maximum of partial sums of a finite number of independent normal variables, Biometrika, **42**, 1—2 (1955).
[12] А. Н. Колмогоров, Das Gesetz des iterirton Logarithmus, Math. Annalen, **101** (1929), 126.
[13] Г. Крамер, Об одной новой предельной теореме теории вероятностей, УМН 10 (1944), 166.

---

* Вероятности (70.2) связаны соотношениями, которые могут представлять и самостоятельный интерес. Например, для любых $\nu_1, \ldots, \nu_l$ и $n_{k,\nu_1,\ldots,\nu_l}p_{kj}^{(n)} = {}_{j,\nu_1,\ldots,\nu_l}p_{kj}^{(n}$ и ряд других.

** Вероятность $\mathbf{P}(s_n = x/s_0 = 0)$ может быть найдена как $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{w^n\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda^{x+1}}d\lambda$. По этому $p_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(s_n = x/s_0 = 0)z^n = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint \frac{w^n(\lambda^{-1})}{\lambda^{x+1}}d\lambda$. Производя формальную перестановку знаков $\sum$ и $\oint$, будем иметь

$$p_x(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\lambda}{\lambda^{x+1}(1 - zw(\lambda^{-1}))}. \qquad (71.2$$

Полученное соотношение оказывается справедливым только в том случае, если $|z| <$ и контур интегрирования лежит в кольце $\lambda_1(|z|) < \left|\frac{1}{\lambda}\right| < \lambda_2(|z|)$. Правая часть в (71.2) может быть вычислена.

[14] H. E. Daniels, Saddlepoint approximations in statistics, Ann. Math. Statist., **25**, 4 (1954).
[15] В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., II, 2 (1957), 214—229.
[16] F. Spitzer, A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., **82**, 2 (1956).
[17] O. Perron, Uber die naherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen, Munchen Sitzungsberichte, 1917, 191.
[18] Б. А. Фукс и В. И. Левин, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
[19] Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.
[20] M. Pellet, Sur un mode de separation des racines des equation ous ets la formula de Lagrange, Bull. des Sciences Math., **5**, 1 (1881).
[21] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
[22] K. L. Chung, Contributions to the theory of Markov chains, J. of Research of National Bur. of Standards of USA, **50**, 4 (1953).

LIMIT THEOREMS ON THE DISTRIBUTIONS OF MAXIMUM OF SUMS OF BOUNDED LATTICED RANDOM VARIABLES. I

A. A. BOROVKOV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

The bounded latticed indentically disturbed random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots$ are considered. The local (chapter 2) and integral (chapter 3) theorems for the first passage time τ_{1x} over the barrier $x > 0$ in the random wanderings along the straight line with the quantity of jump ξ_k are studied. The formulas for $\mathbf{P}(\tau_{1x} = n)$ and $\mathbf{P}(\tau_{1x} > n)$ in obvious form are obtained for the full «spectrum» of values x, beginning with $x = o(n)$ until x, equivalent to the product maximum jump ξ_k by n. The theorems for $\mathbf{P}(\tau_{1x} > n)$ simultaneously are integral theorems for maximum of sums $\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k \nu = 1, \ldots, n$. The formulas for first moments τ_{1x} and the distribution of the quantity of the first excess over the barrier x are also obtained.

Some results were published in [9] without proofs.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1960

Том V *Выпуск 2*

УСЛОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ МАРКОВА*

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

Введение

Случайные помехи вызывают ошибки в работе всякого рода устройств: систем связи, счетно-решающих устройств, измерительных систем и пр. Вследствие этого численные значения, получаемые на выходе устройства, не являются вполне достоверными. Истинные значения искомых величин остаются случайными, но для их уточнения выходные данные играют кардинальную роль. Статистические свойства искомых величин при известных выходных данных называются условными или апостериорными. Их исследование важно для оценки качества работы систем, уточнения искомых величин и выяснения путей усовершенствования этих систем.

Исследование условных статистических свойств процессов, протекающих в системе, облегчается в том случае, когда эти процессы представляют собой процессы Маркова или являются компонентами расширенного марковского процесса. Физически указанное ограничение соответствует тому, что принимается во внимание лишь некоторое количество важнейших корреляций низших порядков и не учитываются остальные. Введенное предположение не является ограничительным с принципиальной точки зрения, поскольку всегда можно, расширяя и усложняя процесс Маркова, включать в рассмотрение все более высокие корреляции.

Задача изучения условных вероятностей возникает, в частности, при отыскании оптимальных преобразований, осуществляющих фильтрацию и экстраполяцию полезных сигналов [4]. Пусть принимаемый сигнал $y(t)$ или сигналы $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ представляют собой известные функции

$$y_i(t) = f_i(x_1(t), \ldots, x_m(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

от полезных сигналов $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ и случайных помех $\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$. Если $x_1(t), \ldots, x_m(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ в совокупности образуют многомерный процесс Маркова, то очевидно функции $y_1(t), \ldots, y_k(t), x_1(t), \ldots, x_m(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ также в совокупности будут составлять многомерный процесс

---

* От редакции. Изложение в части задач с непрерывным временем не вполне убедительно. Ввиду большого интереса поставленных задач статья печатается в виде, представленном автором.

Маркова $X(t)$. Зная реализации $y_1(t), \ldots, y_k(t)$, мы можем исследовать условные статистические свойства остальных компонент $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, $\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ процесса $X(t)$ с целью выявить апостериорные данные о $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ (некоторые из функций $\xi_1(t), \ldots, \xi_l(t)$ при этом можно отбросить). Таким образом, задача сводится к исследованию статистических свойств части компонент многомерного процесса Маркова при фиксированных реализациях других компонент.

Ввиду большого числа различных частных случаев сформулированной выше проблемы, мы рассмотрим лишь несколько простейших случаев и на их примере проиллюстрируем идеи, которые, без сомнения, допускают весьма широкое обобщение.

§ 1. Условные цепи Маркова и условные вероятности

1. Рассмотрим дискретную цепь Маркова. Пусть при каждом испытании может осуществиться одно из конечного или бесконечного числа несовместимых событий: $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{21}, A_{22}, \ldots$. Пусть далее $f_{i+1,i}(x, y; x', y')$ — вероятность наступления события A_{xy} в $(i+1)$-ом испытании при условии, что в предыдущем испытании произошло событие $A_{x'y'}$ и $f_i(x, y) = P(A_{xy})$ безусловная вероятность события A_{xy}. Очевидно

$$\sum_{x,y} f_{i+1,i}(x, y; x', y') = 1, \quad \sum_{x,y} f_i(x, y) = 1.$$

По определению цепей Маркова вероятность наступления события $A_{x_1y_1}$ в первом испытании, события $A_{x_2y_2}$ во втором испытании и т. д., наконец, события $A_{x_sy_s}$ в s-ом испытании, дается формулой

$$P(A_{x_sy_s}, \ldots, A_{x_1y_1}) = f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots$$

$$\ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1y_1) f_1(x_1, y_1), \tag{1}$$

где $f_1(x_1, y_1)$ — вероятность наступления события $A_{x_1y_1}$ в первом испытании.

Перейдем к задаче с условными вероятностями. Пусть известны реализации $y_1, \ldots, y_s$ второго индекса в указанных выше испытаниях. Отождествим выпадение этих индексов с наступлением событий $C_{y_1}, \ldots, C_{y_s}$. Реализации $x_1, \ldots, x_s$ первого индекса при этом остаются неизвестными (случайными). События $B_{x_1}, \ldots, B_{x_s}$, совпадающие с выпадением указанных значений первого индекса, образуют по определению *условную цепь Маркова*. Вероятность совмещения этих событий определяется по формуле, обратной вероятности [1]:

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = \frac{P(B_{x_s}C_{y_s}, \ldots, B_{x_1}C_{y_1})}{\sum\limits_{x_1, \ldots, x_s} P(B_{x_s}C_{y_s}, \ldots, B_{x_1}C_{y_1})}, \quad (B_{x_i}C_{y_i} = A_{x_iy_i}). \tag{2}$$

Подставляя сюда (1), получаем

$$P(B_{x_1}, \ldots, B_{x_s}) = \frac{f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1, y_1) f_1(x_1, y_1)}{\sum_{x_s, \ldots, x_1} f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1, y_1) f_1(x_1, y_1)} \tag{3}$$

Мы предполагаем здесь функцию $f_{i+1,i}(x, y; x', y')$ и заданные значения $y_1, \ldots, y_s$ такими, что выполняется условие

$$\sum_{x_1, \ldots, x_s} f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1, y_1) f_1(x_1, y_1) \neq 0. \tag{4}$$

Рассмотрение реализаций $y_1, \ldots, y_s$, обращающих в нуль указанную сумму, т. е. имеющих нулевую априорную вероятность, не представляет интереса именно вследствие их невероятности. Это условие в той или иной форме будет приниматься и в дальнейшем.

Для сокращения записи мы не будем больше выписывать $y_1, \ldots, y_s$, используя следующие обозначения

$$\begin{gathered} f_i(x_i) = f_i(x_i, y_i), \\ f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) \equiv f_{i+1,i}(x_{i+1}, y_{i+1}; x_i, y_i); \end{gathered} \tag{5}$$

$$f_{ji}(x_j, x_i) = \sum_{x_{j-1}, \ldots, x_{i+1}} f_{j,j-1}(x_j, x_{j-1}) \ldots f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i), \quad (j > i+1).$$

Кроме того, обозначим

$$\overline{F}_i(x_i) = \sum_{x_s} f_{si}(x_s, x_i). \tag{6}$$

Тогда (3) запишется в виде

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = \frac{f_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, x_1) f_1(x_1)}{\sum_{x_1} \overline{F}_1(x_1) f_1(x_1)}. \tag{7}$$

Хотя выражение (7) напоминает по форме выражение типа (1), справедливое для обычной цепи Маркова, в то же время имеется и существенное отличие. «Условная функция перехода» $f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)$ уже не обязана удовлетворять обычным условиям нормировки. Как правило, соответствующие суммы не равны единице:

$$\sum_{x_{i+1}} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) \neq 1. \tag{8}$$

Чтобы перейти к нормированным «условным вероятностям перехода», используем следующий прием. Представим (7) в виде

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = \frac{f_{s,s-1}(x_s, x_{s-1})}{\overline{F}_{s-1}(x_{s-1})} \overline{F}_{s-1}(x_{s-1}) f_{s-1,s-2}(x_{s-1}, x_{s-2}) \ldots$$
$$\ldots \frac{f_1(x_1)}{\sum_{x_1} \overline{F}_1(x_1) f_1(x_1)}. \tag{9}$$

Далее, чтобы иметь дело с нормированной функцией, поделим $\overline{F}_{s-1}(x_{s-1})\,f_{s-1,s-2}(x_{s-1};\ x_{s-2})$ на $\overline{F}_{s-2}(x_{s-2})$, умножив на эту величину функцию $f_{s-2,s-3}(x_{s-2},\ x_{s-3})$ и т. д. В итоге (7) будет представлено в виде

$$P(B_{x_s},\ \ldots,\ B_{x_1}) = p_{s,s-1}(x_s,\ x_{s-1})\,p_{s-1,s-2}(x_{s-1},\ x_{s-2})\ldots$$

$$\ldots p_{21}(x_2,\ x_1)\,p_1(x_1), \tag{10}$$

где $p_{i+1,i}(x_{i+1},\ x_i)$ суть условные вероятности перехода

$$p_{i+1,i}(x_{i+1},\ x_i) = \overline{F}_{i+1}(x_{i+1})\,f_{i+1,i}(x_{i+1},\ x_i)\frac{1}{\overline{F}_i(x_i)}, \tag{11}$$

удовлетворяющие, как легко убедиться, обычному условию

$$\sum_{x_{i+1}} p_{i+1,i}(x_{i+1},\ x_i) = 1, \tag{12}$$

$$p_1(x_1) = \frac{\overline{F}_1(x_1)\,f_1(x_1)}{\sum\limits_{x_1}\overline{F}_1(x_1)\,f_1(x_1)} \tag{13}$$

– новое начальное распределение вероятностей.

Вероятности перехода через несколько испытаний, определяемые формулой

$$p_{ji}(x_j,\ x_i) = \sum_{x_{j-1},\ \ldots,\ x_{i+1}} p_{j,j-1}(x_j,\ x_{j-1})\ \ldots\ p_{i+1,i}(x_{i+1},\ x_i) =$$

$$= \overline{F}_j(x_j)\,f_{ji}(x_j,\ x_i)\frac{1}{\overline{F}_i(x_i)},\ (j > i+1), \tag{14}$$

удовлетворяют обычному равенству

$$\sum_{x_k} p_{jk}(x_j,\ x_k)\,p_{ki}(x_k,\ x_i) = p_{ji}(x_j,\ x_i),\ (j > k > i).$$

Таким образом, *условную цепь Маркова можно рассматривать как обычную цепь Маркова, но с вероятностью перехода и начальными вероятностями, зависящими от длины интервала наблюдения и от заданных значений $y_1, \ldots, y_s$ известного индекса на всем этом интервале.*

Для отыскания условных вероятностей могут быть использованы вытекающие из (5), (6) рекуррентные соотношения

$$\overline{F}_{j-1}(x_i) = \sum_{x_j}\overline{F}_j(x_j)\,f_{j,j-1}(x_j,\ x_{j-1}),\quad (j = s,\ \ldots,\ 2), \tag{15}$$

которым соответствует «начальное условие»

$$\overline{F}_s(x_s) = 1.$$

Функции (15) отыскиваются в «обратной последовательности», т. е. в порядке уменьшения индекса j. После определения «последней» функции $\overline{F}_1(x_1)$ конструируем «начальные вероятности» (13). Вероятности $p_i(x_i) = P(B_{x_i})$ при-

последующих испытаниях можно находить при помощи рекуррентных соотношений

$$p_{i+1}(x_{i+1}) = \sum_{x_i} p_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)\, p_i(x_i), \quad (i = 1, \ldots, s-1). \tag{16}$$

Для описанной процедуры отыскания апостериорных вероятностей $p_i(x_i)$ характерно двойное движение по цепочке индексов: сначала в обратном порядке от s к 1 затем в прямом — от 1 к s. Описанное двойное движение по цепочке индексов (по «времени»), характерно для условных цепей Маркова и сохраняется в других вариантах построения условных вероятностей, которые будут описаны в дальнейшем.

2. Вероятности (2), (3) есть условные вероятности при известных реализациях $y_1, \ldots, y_s$, более подробно их надо было бы записать $P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1} \mid C_{y_s}, \ldots, C_{y_1})$. Для одномерных условных вероятностей $p_i(x_i)$ удобно применять следующие более подробные обозначения

$$p_{si1}(x_i) = P(B_{x_i} \mid C_{y_s}, \ldots, C_{y_1}). \tag{17}$$

Особый интерес представляют апостериорные вероятности значения x в последнем испытании из произведенной серии, соответствующем последнему известному значению y. Эти вероятности мы будем называть *финальными* и введем для них особое обозначение:

$$w_i(x_i) = p_{ii1}(x_i). \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что

$$w_i(x_i) = \frac{\sum\limits_{x_1} f_{i1}(x_i, x_1) f_1(x_1)}{\sum\limits_{x_i, x_1} f_{i_1}(x_i, x_1) f_1(x_1)}, \quad (i > 1). \tag{19}$$

Рассмотрим, как изменится финальная вероятность, если увеличить на единицу число наблюдений значений индекса y. Чтобы получить новую вероятность $w_{i+1}(x_{i+1})$ в формуле (19) следует заменить i на $i+1$ и $f_{i1}(x_i, x_1)$ на

$$f_{i+1,1}(x_{i+1}, x_1) = \sum_{x_i} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) f_{i1}(x_i, x_1).$$

При этом

$$w_{i+1}(x_{i+1}) = \text{const} \sum_{x_i, x_1} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) f_{i1}(x_i, x_1) f_1(x_1).$$

Сопоставляя с (19), находим рекуррентное соотношение

$$w_{i+1}(x_{i+1}) = \text{const} \sum_{x_i} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) w_i(x_i).$$

Постоянная в последнем соотношении равна $\Sigma f_{i1} f_1 / \Sigma f_{i+1,1} f_1$. Записывая ее в несколько другой форме, имеем

$$w_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{\sum\limits_{x_i} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) w_i(x_i)}{\sum\limits_{x_{i+1}, x_i} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) w_i(x_i)}. \tag{20}$$

Полученное уравнение описывает эволюцию финальных апостериорных вероятностей по мере увеличения числа наблюдений. Будем его называть уравнением первого рода. Начальное условие для этого уравнения имеет вид

$$w_1(x_1) = p_{111}(x_1) = \frac{f_1(x_1)}{\sum\limits_{x_1} f_1(x_1)}. \tag{21}$$

3. Вместе с вероятностями (18) удобно ввести финальные вероятности другого типа:

$$\overline{w}_i(x_i) = p_{sii}(x_i) = P(B_{x_i} \mid C_{y_s}, \ldots, C_{y_i}). \tag{22}$$

Чтобы выразить $\overline{w}_i(x_i)$ через априорные данные, запишем вероятность укороченной последовательности испытаний:

$$P(B_{x_s}C_{y_s}, \ldots, B_{x_i}C_{y_i}) = f_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) f_i(x_i)$$

и перейдем к условным вероятностям $P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_i} \mid C_{y_s}, \ldots, C_{y_i})$. Просуммировав далее по $x_s, \ldots, x_{i+1}$, будем иметь

$$\overline{w}_i(x_i) = \frac{\overline{F}_i(x_i) f_i(x_i)}{\sum\limits_{x} \overline{F}_i(x) f_i(x)}. \tag{23}$$

Полученное соотношение позволяет исключить из формул (11), (13), (14) функцию $\overline{F}_i$, не имеющую характера вероятности, заменив ее на условную вероятность w_i. Начальное распределение (13) есть не что иное, как

$$p_1(x_1) = \overline{w}_1(x_1). \tag{24}$$

Далее, подставив

$$\overline{F}_i(x_i) = \text{const}\,\frac{\overline{w}_i(x_i)}{f_i(x_i)} \tag{25}$$

в (11), получим

$$p_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) = \text{const}\,\frac{\overline{w}_{i+1}(x_{i+1})}{f_{i+1}(x_{i+1})} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)\,\frac{f_i(x_i)}{\overline{w}_i(x_i)}$$

или, определив постоянную из условия нормировки,

$$p_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) = \frac{\dfrac{\overline{w}_{i+1}(x_{i+1})}{f_{i+1}(x_{i+1})} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)}{\sum\limits_{x} \dfrac{\overline{w}_{i+1}(x)}{f_{i+1}(x)} f_{i+1,i}(x, x_i)}. \tag{26}$$

Вместо (14) имеем

$$p_{ji}(x_j, x_i) = \frac{\dfrac{\overline{w}_j(x_j)}{f_j(x_j)} f_{ji}(x_j, x_i)}{\sum\limits_{x} \dfrac{\overline{w}_j(x)}{f_j(x)} f_{ij}(x, x_i)}. \tag{27}$$

Наконец, подставив (26) в (16), находим уравнение

$$p_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{w_{i+1}(x_{i+1})}{f_{i+1}(x_{i+1})} \sum_{x_i} \frac{f_{i+1}(x_{i+1}, x_i)\, p_i(x_i)}{\sum\limits_{x} \dfrac{\overline{w}_{i+1}(x)}{f_{i+1}(x)} f_{i+1,i}(x, x_i)}, \tag{28}$$

описывающее эволюцию условных вероятностей, которое мы будем называть уравнением второго рода. В этом уравнении большую роль играет финальная вероятность, которая должна быть найдена предварительно путем решения уравнения первого рода. Уравнение, описывающее изменение $\overline{w}_i$, конечно, несколько отличается от (20). Чтобы его найти, подставим (25) в (15). После этого будем иметь

$$\overline{w}_{j-1}(x_{j-1}) = \text{const}\, f_{j-1}(x_{j-1}) \sum_{x_j} \frac{\overline{w}_j(x_j)}{f_j(x_j)} f_{j,j-1}(x_j, x_{j-1}).$$

Используя условие нормировки, находим искомое уравнение первого рода

$$\overline{w}_{j-1}(x_{j-1}) = \frac{\sum\limits_{x_j} \overline{w}_j(x_j)\, \overline{f}_{j,j-1}(x_j, x_{j-1})}{\sum\limits_{x,x} \overline{w}_j(x)\, \overline{f}_{j,j-1}(x, x')}, \tag{29}$$

где

$$\overline{f}_{j,i}(x, x') = \frac{1}{f_j(x)} f_{j,i}(x, x')\, f_i(x'). \tag{30}$$

Это уравнение является по-своему сопряженным к (20). Ему соответствует «начальное» условие

$$\overline{w}_s(x_s) = p_{sss}(x_s) = \frac{f_s(x_s)}{\sum\limits_{x} f_x(x_s)}. \tag{31}$$

Определив по (29) вероятности $\overline{w}_j$ в обратной последовательности (в порядке уменьшения индекса j), мы получим в конце вероятность w_1, которая согласно (24) является начальной для уравнения второго рода (28).

4. При помощи функции (30) вероятности (3) можно записать

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = \text{const}\, f_s(x_s)\, \overline{f}_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots$$
$$\ldots\, \overline{f}_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) \frac{1}{f_i(x_i)} f_{i,i-1}(x_i, x_{i-1}) \ldots f_{21}(x_2, x_1) f_1(x_1) \tag{32}$$

Суммируя по $x_s, \ldots, x_{i+1} x_{i-1}, \ldots, x_1$ и учитывая формулы (19), (23), последней из которых можно придать форму

$$\overline{w}_i(x_i) = \frac{\sum\limits_{x_s} f_s(x_s)\, \overline{f}_{si}(x_s, x_i)}{\sum\limits_{x_s, x_i} f_s(x_s)\, \overline{f}_{si}(x_s, x_i)}, \tag{33}$$

олучаем следующее важное соотношение между условными вероятностями различных типов:

$$p_i(x_i) \equiv p_{si1}(x_i) = \text{const}\,\frac{\overline{\omega}_i(x_i)\,\omega_i(x_i)}{f_i(x_i)}. \tag{34}$$

§ 2. Обращение знака времени

1. Под обращением знака времени мы понимаем произведение испытаний обратном порядке. Для выяснения статистических свойств цепей Маркова, ассматриваемых в обратном порядке, целесообразно применять прием, ана-огичный тому, который был использован для получения вероятностей пере-хода (11).

Начнем с рассмотрения простого случая неусловных цепей Маркова. Пусть имеется цепь из s испытаний, соответствующая начальным вероят-остям $f_1(x_1)$ и вероятностям перехода $f_{i+1,i}(x_{i-1}, x_i)$, которые удовлетворяют бычному условию:

$$\sum_x f_{i+1,i}(x, x') = 1. \tag{35}$$

Совместные вероятности равны:

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = f_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, x_1) f_1(x_1). \tag{36}$$

Рассматривая данную цепь как цепь Маркова, идущую в обратном порядке ы должны последнее выражение представить в виде

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = f_s(x_s)\,\overline{f}_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots \overline{f}_{21}(x_2, x_1), \tag{37}$$

де $\overline{f}_{i+1,i}(x, x')$ удовлетворяют условию

$$\sum_{x'} \overline{f}_{i+1,i}(x, x') = 1. \tag{38}$$

По аналогии с (11) следует положить

$$\overline{f}_{i+1,i}(x_{i+1}, x) = \frac{1}{F_{i+1}(x_{i+1})}\, f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)\, F_i(x_i) \tag{39}$$

$$f_s(x_s) = F_s(x_s). \tag{40}$$

десь

$$F_i(x_i) = \sum_{x_1} f_{i1}(x_i, x_1) f_1(x_1) \tag{41}$$

ть функция, совпадающая в данном случае с одномерным распределением.

В случае однородной прямой цепи Маркова, но при начальном распреде-нии вероятностей, отличающемся от стационарного, обратная цепь Маркова

будет не однородной. Если же начальные вероятности $f_1(x_1) = f(x_1)$ являются стационарными, т. е. удовлетворяют условию

$$\sum_{x'} f_{i+1,i}(x, x') f(x') = f(x), \tag{42}$$

то обратная цепь Маркова также будет однородной и ей будут соответствовать вероятности перехода:

$$\overline{f}_{i+1,i}(x, x') = \frac{1}{f(x)} f_{i+1,i}(x, x') f(x'). \tag{43}$$

Вводя симметризованную функцию перехода

$$\varphi(x, x') = \sqrt{\frac{f(x')}{f(x)}} f_{21}(x, x') = \sqrt{f_{21}(x, x')\,\overline{f}_{21}(x, x')}\,, \tag{44}$$

многомерное распределение (36) можно записать в форме

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = \sqrt{f(x_s)}\,\varphi(x_s, x_{s-1}) \ldots \varphi(x_2, x_1)\sqrt{f(x_1)}\,, \tag{45}$$

симметричной относительно знака времени. Функция (44) удовлетворяет условиям

$$\sum_{x} \sqrt{f}(x)\varphi(x, x') = \sqrt{f}(x'); \quad \sum_{x'} \varphi(x, x')\sqrt{f}(x') = \sqrt{f}(x), \tag{46}$$

которые суть не что иное, как (35) и (42).

2. Описанные выше приемы, касающиеся обращения знака времени, обобщаются на случай процессов Маркова, непрерывно протекающих во времени. При этом вместо индекса i будем выписывать непрерывный аргумент t. Так вероятность перехода из x' в x будем записывать в виде $f(x, t; x', t')$, одномерное распределение $f_i(x)$ будем обозначать $f(x, t)$.

Исходный процесс описывается уравнениями, которые в операторной форме записи имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Gf; \quad -\frac{\partial f}{\partial t'} = fG. \tag{47}$$

Здесь G — оператор с матричными элементами $(G)_{xx'}$, так что

$$(Gf)_{xx'} = \sum_{x''} (G)_{xx''} f(x'', t; x', t'); \quad (fG)_{xx'} = \sum_{x''} f(x, t; x'', t')(G)_{x'',x}.$$

Производя транспонирование, второе уравнение (47) можно также записать

$$-\frac{\partial f^T}{\partial t'} = G^T f^T, \tag{48}$$

где G^T — транспонированный оператор с матричными элементами

$$(G^T)_{xx'} = (G)_{x'x}.$$

Оператор G обладает свойством

$$\sum_x (G)_{xx'} = 0, \tag{49}$$

в то время как вообще G^T подобным свойством не обладает. Это обстоятельство препятствует интерпретации уравнения (48) как уравнения $\partial f/\partial t = Gf$ в обращенном времени. Положение исправляется тем, что вводится сопряженная вероятность перехода

$$\bar{f} = \frac{1}{f_1} f f_1, \tag{50}$$

где f_1 — распределение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = G f_1 \tag{51}$$

Дифференцируя (50) и используя (47), (51), получаем

$$-\frac{\partial \bar{f}}{\partial t'} = \frac{1}{f_1}\left(-\frac{\partial f}{\partial t'}\right) f_1 - \frac{1}{f_1} f \frac{\partial f_1}{\partial t'} = \frac{1}{f_1} f G f_1 - \frac{1}{f_1} f \frac{\partial f_1}{\partial t'} =$$

$$= \bar{f}\left[\frac{1}{f_1} G f_1 - \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t'}\right] = f\left[\frac{1}{f_1} G f_1 - \frac{(G f_1)}{f_1}\right].$$

Взяв транспонированную матрицу, имеем

$$-\frac{\partial \bar{f}^T}{\partial t'} = \bar{G}\bar{f}^T, \tag{52}$$

где

$$\bar{G} = f_1 G^T \frac{1}{f_1} - \frac{(G(f_1))}{f_1} \tag{53}$$

— сопряженный оператор, соответствующий обращенному знаку времени. Он же обладает свойством (49): $\sum_x (\bar{G})_{xx'} = 0$.

3. Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Процесс на два положения. Пусть $x(t)$ может принимать лишь два значения. Без ограничения общности их можно полагать равными 1 и 0 («да», «нет»). Исходный процесс описывается уравнениями

$$\frac{\partial f(1,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} = -\alpha(t) f(1,t) + \beta(t) f(0,t). \tag{54}$$

Матрица G имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha(t) & -\beta(t) \end{pmatrix}. \tag{55}$$

По формуле (53) находим обращенный оператор

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha}(t) & \bar{\beta}(t) \\ \bar{\alpha}(t) & -\bar{\beta}(t) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

где

$$\overline{\alpha}(t) = \frac{f(0, t)}{f(1, t)}\beta(t); \quad \overline{\beta}(t) = \frac{f(1, t)}{f(0, t)}\alpha(t).$$

В том простом случае, когда α, β не зависят от времени, а $f(x, t)$ — стационарное распределение $\left(f(1, t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta},\ f(0, t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$, то сопряженные параметры равны исходным:

$$\overline{\alpha} = \alpha; \quad \overline{\beta} = \beta.$$

б) Непрерывный процесс Маркова. Как известно, вероятность перехода непрерывного процесса Маркова удовлетворяет уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial f(x, t; x', t')}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x, t) f(x, t; x', t')] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x, t) f(x, t; x', t')];$$

$$-\frac{\partial f(x, t; x', t')}{\partial t'} = \frac{\partial f(x, t; x', t')}{\partial x'} a(x', t') + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, t; x', t')}{\partial x'^2} b(x', t'), \tag{57}$$

которые соответствуют оператору

$$G = -\frac{\partial}{\partial x} a(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, t) \tag{58}$$

в уравнениях (47).

Нетрудно получить, что понятная вероятность перехода $\overline{f}(x, t; x', t') = \frac{1}{f(x, t)} f(x, t; x', t') f(x', t')$ удовлетворяет аналогичным же уравнениям

$$-\frac{\partial \overline{f}(x, t; x', t')}{\partial t} = \overline{a}(x, t)\frac{\partial \overline{f}(x, t; x', t')}{\partial x} + \frac{1}{2}\overline{b}(x, t)\frac{\partial^2 \overline{f}(x, t; x', t')}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \overline{f}(x, t; x', t')}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'}[\overline{f}(x, t; x', t')\overline{a}(x', t')] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}[\overline{f}(x, t; x', t')\overline{b}(x', t')], \tag{59}$$

где новые функции $\overline{a}(x, t)$, $\overline{b}(x, t)$ выражаются через одномерную плотность вероятности $f(x, t)$ исходного процесса по формулам

$$\overline{a}(x, t) = -a(x, t) + \frac{1}{f(x, t)}\frac{\partial}{\partial x}[b(x, t) f(x, t)]; \quad \overline{b}(x, t) = b(x, t). \tag{60}$$

В случае стационарного начального распределения

$$f(x, t) = \frac{\text{const}}{b(x)} \exp\left\{2\int^x \frac{a(z)}{b(z)}\, dz\right\}, \tag{61}$$

поэтому

$$\overline{a}(x, t) = a(x); \qquad \overline{b}(x) = b(x). \tag{62}$$

Следовательно, непрерывный процесс Маркова, так же как и процесс на два положения, является симметричным относительно знака времени.

Если в соответствии с (44) ввести симметричную функцию перехода

$$\varphi(x, t;\ x', t') = \frac{1}{\sqrt{f(x, t)}} f(x, t;\ x', t') \sqrt{f(x', t')},$$

то при условии (42) она будет удовлетворять дифференциальным уравнениям одинакового вида

$$\frac{\partial \varphi(x, t;\ x', t')}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t;\ x', t') \right] - \frac{1}{2} F(x, t) \varphi(x, t;\ x', t');$$

(63)

$$\frac{\partial \varphi(x, t;\ x', t')}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'}\left[b(x', t') \frac{\partial}{\partial x'} \varphi(x, t;\ x', t') \right] - \frac{1}{2} F(x', t') \varphi(x, t;\ x', t'),$$

$$\left(F = \frac{a^2}{b} + b \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{4b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right).$$

В других случаях, например в случае процесса на три положения, даже при стационарном начальном распределении функция перехода (44) может быть не симметричной. В качестве примера укажем процесс с матрицей перехода

$$\| f(x, x') \| = \| \varphi(x, x') \| = \begin{pmatrix} q & 0 & p \\ p & q & 0 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}, \quad (p + q = 1),$$

в котором отчетливо видно круговое движение по индексам $1 \to 2 \to 3 \to 1 \ldots$. При обращении знака времени движение по индексам будет проходить в другом направлении, поэтому прямой процесс будет отличаться от обратного и будет иметь место необратимость во времени. Вообще, в случае эргодического процесса необратимость возникает вследствие наличия круговых движений. Обратимость должна иметь место при их отсутствии, т. е. при выполнении обобщенного условия потенциальности. Это условие было сформулировано А. Н. Колмогоровым [2], [3].

в) Чисто разрывный процесс Маркова. Пусть $\beta(x, t)$ — плотность распределения скачков случайной функции, задающая вероятность $\beta(x, t)\,\Delta t + o(\Delta t)$ хотя бы одного скачка за промежуток времени Δt, а $W(x, x', t)$ — условная плотность вероятности значения x после скачка при условии, что до скачка в момент t значение функции было x'. Тогда вероятность перехода удовлетворяет известным уравнениям Колмогорова—Феллера

$$\frac{\partial f(x, t; x', t')}{\partial t} = \int W(x, x'', t) \beta(x'', t) f(x'', t; x', t)\, dx'' - \beta(x, t) f(x, t; x', t'),$$

$$-\frac{\partial f(x, t; x', t')}{\partial t'} = \int f(x, t; x'', t') W(x'', x', t') \beta(x', t')\, dx'' -$$

$$- f(x, t; x', t') \beta(x', t'); \qquad (64)$$

$$((G)_{xx'} = [W(x, x', t) - \delta(x - x')] \beta(x', t)).$$

Переходя к процессу, развивающемуся в обратном направлении времени,

нетрудно убедиться, что обратная вероятность перехода $\overline{f}(x, t; x', t') = \frac{1}{f(x,t)} f(x, t; x', t') f(x', t')$ удовлетворяет таким же уравнениям, но с другой плотностью скачков $\overline{\beta}(x, t)$ и плотностью вероятности $\overline{W}(x, x', t)$ перехода от x к x':

$$\overline{\beta}(x, t) = \frac{1}{f(x, t)} \int W(x, x', t) \beta(x', t) f(x', t)\, dx';$$

$$\overline{W}(x, x', t) = \frac{1}{\overline{\beta}(x, t) f(x, t)} W(x, x' t) \beta(x', t) f(x', t). \tag{65}$$

При стационарном распределении $f(x, t)$ $\left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0\right)$ имеем $\overline{\beta}(x) = \beta(x)$.

Перейдем к условным процессам Маркова и будем рассматривать их как протекающие в обратном направлении времени. Аналогично (41) введем функцию

$$F_i(x_i) = \sum_{x_1} f_{i1}(x_i, x_1) f_1(x_1). \tag{66}$$

В отличие от безусловного процесса Маркова теперь функция $F_i(x_i)$ не будет совпадать с одномерным распределением. При помощи (66) определяем возвратные вероятности перехода

$$\overline{p}_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) = \frac{1}{F_{i+1}(x_{i+1})} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) F_i(x_i), \tag{67}$$

которые удовлетворяют необходимому условию нормировки (38) и через которые совместные вероятности (7) можно записать

$$P(B_{x_s}, \ldots, B_{x_1}) = p_s(x_s) \overline{p}_{s,s-1}(x_s, x_{s-1}) \ldots \overline{p}_{21}(x_2, x_1). \tag{69}$$

Здесь

$$p_s(s_s) = \frac{F_s(x_s)}{\sum_{x_s} F_s(x_s)} \tag{69}$$

— финальное распределение (19), играющее роль начального распределения для попятного процесса.

Функции (66) сами по себе не являются распределением вероятности. Однако, обращаясь к формулам (19), легко убедиться, что они отличаются лишь нормировочным множителем от финальных условных вероятностей:

$$w_i(x_i) = \frac{F_i(x_i)}{\sum_{x_i} F_i(x_i)}. \tag{70}$$

Вследствие этого при рассмотрении возвратного процесса удобно выражать вероятностии (67) и (69) не через функцию (66), а через финальные вероятности. Вместо (67) при этом будем иметь

$$\overline{p}_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) = \frac{f_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i) w_i(x_i)}{\sum_{x} f_{i+1,i}(x_{i+1}, x) w_i(x)}. \tag{71}$$

Таким образом, найдя финальные вероятности, эволюция которых описывается уравнением первого рода (20), мы можем исследовать статистические свойства возвратного условного процесса Маркова. Одномерное апостериорное распределение

$$p_i(x_i) = \sum_{x_s} p_s(x_s)\,\overline{p}_{si}(x_s, x_i) \tag{72}$$

вследствие (71) при этом эволюционирует по закону

$$p_i(x_i) = \sum_{x_{i+1}} \frac{p_{i+1}(x_{i+1})\,\overline{f}_{i+1,i}(x_{i+1}, x_i)\,w_i(x_i)}{\sum\limits_{x'} \overline{f}_{i+1,i}(x_{i+1}, x')\,w_i(x')}. \tag{73}$$

Последнее уравнение является уравнением второго рода. Начальным условием для него служит финальная вероятность, определяемая уравнением первого рода:

$$p_s(x_s) = w_s(x_s), \tag{74}$$

Путем последовательного решения уравнений первого и второго рода могут быть определены любые условные вероятности.

4. Приведенные выражения относились к тому случаю, когда x, y могли принимать лишь дискретные значения. Совершенно очевидно, что возможны различные обобщения теории. В некоторых случаях обобщение тривиально и затрагивает лишь форму записи формул. Так в том случае, когда x и y представляют собой координаты n и m-мерного пространства соответственно, а $f_{i+1,i}(x, y; x', y')$ и реализации $y_1, \ldots, y_s$ таковы, что функция

$$f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1, y_1)\, f_1(x_1, y_1)$$

ограничена и при всех $x_1, \ldots, x_r$ удовлетворяет условию

$$\int \ldots \int f_{s,s-1}(x_s, y_s; x_{s-1}, y_{s-1}) \ldots f_{21}(x_2, y_2; x_1, y_1)\, f_1(x_1, y_1)\, dx_s \ldots dx_1 \neq 0,$$

то приведенные ранее формулы сохраняют смысл, если в них суммы по x заменить на интегралы.

Эволюция финальных вероятностей

$$w_i(x_i) = \frac{\int f_{i1}(x_i, x_1)\, f_1(x_1)\, dx_1}{\iint f_{i1}(z, z')\, f_1(z')\, dz dz'}; \quad \overline{w}_i(x_i) = \frac{\int f_s(x_s)\,\overline{f}_{si}(x_s, x_i)\, dx_s}{\iint f_s(z)\,\overline{f}_{si}(z, z')\, dz, dz'}$$

$$(\overline{f}_{ji}(x, x') = \frac{1}{f_j(x)}\, f_{ji}(x, x')\, f_i(x'))$$

описывается уравнениями первого рода

$$w_{i+1}(x) = \frac{\int f_{i+1,i}(x, x')\, w_i(x')\, dx'}{\iint f_{i+1,i}(z, z')\, w_i(z)\, dz dz'}; \tag{75}$$

$$\overline{w}_{j-1}(x') = \frac{\int \overline{w}_j(x)\,\overline{f}_{j,j-1}(x, x')\, dx}{\iint \overline{w}_j(z)\,\overline{f}_{j,j-1}(z, z')\, dz dz'}, \tag{76}$$

которые аналогичны (20), (29). Эти уравнения переходят друг в друга при обращении знака времени.

Уравнения второго рода (28), (73), описывающие эволюцию условных вероятностей, имеют вид

$$p_j(x) = \int \frac{\frac{\overline{w}_j(x)}{\overline{f}_j(x)} f_{j,j-1}(x, x')}{\int \frac{\overline{w}_j(z)}{\overline{f}_j(z)} f_{j,j-1}(z, x')\, dz} p_{j-1}(x')\, dx'; \tag{77}$$

$$p_{j-1}(x') = \int p_j(x) \frac{f_{j,j-1}(x, x')\, w_{j-1}(x')}{\int f_{j,j-1}(x, z') w_{j-1}(z')\, dz'} dx. \tag{78}$$

Первое из них соответствует прямому, а второе — возвратному течению времени.

Начальными вероятностями для уравнений первого рода служат одномерные вероятности (21), (31), а для уравнений второго рода — финальные вероятности (24), (74).

§ 3. Пример: помеха с независимыми значениями

1. Рассмотрим тот случай, когда x_i есть процесс Маркова, описываемый уравнением

$$f_{i+1}(x_{i+1}) = f_i(x_i) + \Delta \sum_{x_i} g(x_{i+1}, x_i) f_i(x_i)$$

$$\left(\sum_x g(x, x') = 0\right), \tag{79}$$

а $y_i = \varphi(x_i) + \xi_i$, где $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — нормально распределенные независимые случайные величины с нулевым средним значением и дисперсией

$$\mathbf{M}\xi_i^2 = \frac{k}{\Delta}, \tag{80}$$

а $\varphi(x)$ — известная функция.

Если $f_1(x_1)$ — начальное распределение для x_1, то совместное начальное распределение вероятностей будет

$$f_1(x_1, y_1) = \left(\frac{\Delta}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta}{2k}\left[y_1 - \varphi(x_1)\right]^2} f_1(x_1). \tag{81}$$

Вероятности перехода совместного процесса (x_i, y_i)

$$f_{i+1,i}(x, y; x', y') = \left(\frac{\Delta}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta}{2k}\left[y_{i+1} - \varphi(x')\right]^2} \{\delta_{xx'} + \Delta g(x, x')\}$$

запишем в форме

$$f_{i+1,i}(x, x') = \left(\frac{\Delta}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \{\delta_{xx'} + \Delta g_1(x, x')\};$$

$$g_1(x, x') = e^{-\frac{\Delta}{2k}\left[y_{i+1}-\varphi(x)\right]^2} g(x, x') + \frac{1}{\Delta}\left[e^{-\frac{\Delta}{2k}\left[y_{i+1}-\varphi(x)\right]^2} - 1\right]\delta_{xx'}. \quad (82)$$

Условный процесс Маркова x_i при фиксированных реализациях $y_1, \ldots, y_s$ будет описываться согласно (20), (28), (73) следующими уравнениями

$$w_{i+1}(x) = \frac{w_i(x) + \Delta \sum\limits_{x'} g_1(x, x')\, w_i(x')}{1 + \Delta \sum\limits_{z, z'} g_1(z, z')\, w_i(z')};$$

$$p_{i+1}(x) = \frac{p_i(x)}{1 + \Delta \sum\limits_{z} \dfrac{\overline{w}_{i+1}(z)}{\overline{f}_{i+1}(z)} g_1(z, x) \dfrac{f_{i+1}(x)}{w_{i+1}(x)}} +$$

$$+ \Delta \frac{\overline{w}_{i+1}(x)}{\overline{f}_{i+1}(x)} \sum_{x'} \frac{g_1(x, x')\, p_i(x')}{\dfrac{\overline{w}_{i+1}(x')}{\overline{f}_{i+1}(x')} + \Delta \sum\limits_{z} \dfrac{\overline{w}_{i+1}(z)}{\overline{f}_{i+1}(z)} g_1(z, x')}; \quad (83)$$

$$p_i(x') = \frac{p_{i+1}(x')\, w_i(x')}{w_i(x') + \Delta \sum\limits_{z} g_1(x', z)\, w_i(z)} + \Delta \sum_{x} \frac{p_{i+1}(x)\, g_1(x, x')\, w_i(x')}{w_i(x) + \Delta \sum\limits_{z} g_1(x, z) w_i(z)}.$$

2. В формулах предыдущего пункта будем уменьшать Δ, полагая, что функция $g(x, x') = g(x, x', \Delta)$, а также $k = k(\Delta)$, вообще зависящие от Δ, стремятся к конечным пределам:

$$g(x, x', \Delta) \to g(x, x'); \; k(\Delta) \to k \text{ при } \Delta \to 0.$$

Вместе с уменьшением Δ будем увеличивать число $s = T/\Delta$ наблюденных значений процесса y_i, применяя обозначение

$$w(x, t_i) = w_i(x); \quad p(x, t_i) = p_i(x), \ldots,$$

где $i = t_i/\Delta$. Тогда в предположении, что существуют конечные пределы $\lim y_i = y(t_i)$ при $\Delta \to 0$, $i \to \infty$ имеем

$$\lim_{\Delta \to 0} g_1(x, x', \Delta) = g(x, x') - \frac{1}{2k}[y(t) - \varphi(x)]^2 \delta_{xx'} \equiv g_1(x, x', t) \quad (84)$$

и из (83), (84) получим

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{w(x, t+\Delta) - w(x, t)}{\Delta} = \sum_{x'} g_1(x, x', t)\, w(x', t) -$$

$$- w(x, t) \sum_{z, z'} g_1(z, z', t)\, w(z', t);$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{p(x, t+\Delta) - p(x, t)}{\Delta} = \sum_{x'} g_2(x, x', t)\, p(x', t) - p(x, t) \times$$

$$\times \sum_{z} g_2(z, x, t); \quad (85)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{p(x', t-\Delta)-p(x', t)}{\Delta}=\sum_x p(x, t)\,g_3(x, x', t)-p(x', t)\sum_z g_3(x', z, t),$$

где

$$g_2(x, x', t)=\frac{\bar{w}(x, t)}{f(x, t)}\,g_1(x, x', t)\,\frac{f(x', t)}{\bar{w}(x', t)};$$

$$g_3(x, x', t)=\frac{1}{w(x, t)}\,g_1(x, x', t)\,w(x', t). \tag{86}$$

При указанном предельном переходе уравнение (79), описывающее априорный процесс, обратится в уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}=Gf,\quad ((G)_{xx'}=g(x, x')), \tag{87}$$

которое определяет вероятности значений функции $x(t)$, зависящей от непрерывного времени. «Помеха» $\xi(t)$ при этом обратится в дельта-коррелированный гауссов процесс («белый шум»), имеющий корреляционную функцию $\mathbf{M}\xi(t)\,\xi(t')=k\delta(t-t')$ (являющийся «производной» от процесса Винера). Таким образом, при фиксированной реализации суммы $y(t)=\varphi(x(t))+\xi(t)$ указанных процессов на интервале $[0, T]$, условный процесс Маркова описывается уравнениями

$$\frac{\partial w}{\partial t}=Gw-\frac{w}{k}\left\{\varphi(x)\,y(t)-\frac{1}{2}\,\varphi^2(x)-\sum_{x'}\left[\varphi(x')\,y(t)-\frac{1}{2}\,\varphi^2(x')\right]w(x', t)\right\}, \tag{88}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\bar{w}}{f}\left(G\,\frac{fp}{\bar{w}}\right)-\frac{fp}{\bar{w}}\left(G^T\,\frac{\bar{w}}{f}\right), \tag{89}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t}=w\left(G^T\,\frac{p}{w}\right)-\frac{p}{w}\,(Gw). \tag{90}$$

Последние получены из (85) путем использования (86), (84). Им соответствуют граничные условия $w(x, 0)=f(x, 0)$; $\bar{w}(x, T)=f(x, T)$ $p(x, 0)=\bar{w}(x, 0)$; $p=(x, T)=w(x, T)$.

Уравнения (85), (88) — (90) выводились нами в предположении ограниченной реализации $y(t)$. Не вызывает сомнений тот факт, что они справедливы также и в случае неограниченной, беспрестанно меняющей знак реализации $y(t)$, имеющей тот же вид, что и типичная реализация дельта-коррелированного процесса. Уравнение (88), содержащее подобную функцию (важно, что она входит линейно), будет в этом отношении напоминать уравнение Ланжевена.

Указанные уравнения (88) — (90) справедливы как при дискретных возможных значениях x, так и при непрерывных.

Уравнение первого рода (88) является нелинейным. Аналогичное уравнение для $\bar{w}$ отличается от (88) тем, что оператор G заменяется на обращенный оператор (53).

Уравнения второго рода (89), (90) линейны. Они описывают апостериорный процесс, текущий в прямом (89) возвратном (90) времени. Эквивалент

ность уравнений (89), (90) с очевидностью следует из указанного ранее (34) соотношения $\frac{\bar{w}}{f} = \text{const}\,\frac{p}{w}$.

3. Обратимся к примерам, рассмотренным в пункте 3 § 2.

а) Пусть $x(t)$ — процесс на два положения, описываемый уравнением (54). В данном случае

$$\varphi(1)y - \frac{1}{2}\varphi^2(1) - \left[\varphi(1)y - \frac{1}{2}\varphi^2(1)\right]w(1,t) -$$

$$- \left[\varphi(0)y - \frac{1}{2}\varphi^2(0)\right]w(0,t) = \left\{[\varphi(1) - \varphi(0)]\,y - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\varphi^2(1) + \frac{1}{2}\varphi^2(0)\right\}w(0,t),$$

поэтому уравнение (88) принимает вид

$$\frac{\partial w(1,t)}{\partial t} = -\frac{\partial w(0,t)}{\partial t} = -\alpha(t)\,w(1,t) + \beta(t)\,w(0,t) +$$

$$+ \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{k}\left[y - \frac{\varphi(1) + \varphi(0)}{2}\right]w(1,t)\,w(0,t). \qquad (91)$$

Так как $w(0,t) = 1 - w(1,t)$, мы имеем, в сущности, одно нелинейное уравнение относительно одной переменной. В качестве начальных условий следует взять априорные вероятности.

Уравнения второго рода (89), (90) суть

$$\frac{\partial p(1)}{\partial t} = -\frac{\partial p(0)}{\partial t} = -\tilde{\alpha}p(1) + \tilde{\beta}p(0);$$

$$-\frac{\partial p(1)}{\partial t} = \frac{\partial p(0)}{\partial t} = -\bar{\bar{\alpha}}p(1) + \bar{\bar{\beta}}\,p(0), \qquad (92)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{\bar{w}(0)}{\bar{w}(1)}\,\frac{f(1)}{f(0)}\,\alpha = \frac{\bar{w}(0)}{\bar{w}(1)}\,\bar{\beta}; \quad \tilde{\beta} = \frac{\bar{w}(1)}{\bar{w}(0)}\,\frac{f(0)}{f(1)}\,\beta; \qquad (93)$$

$$\bar{\bar{\alpha}} = \frac{w(0)}{w(1)}\,\beta; \quad \bar{\bar{\beta}} = \frac{w(1)}{w(0)}\,\alpha. \qquad (94)$$

Записывая решение уравнений (92), можно выразить $p(1,t), p(0,t)$ через $\bar{w}$ или через w в форме интегралов. Через $\bar{w}$ и w одновременно эти вероятности выражаются значительно более просто, поскольку

$$\frac{p(1,t)}{p(0,t)} = \frac{\tilde{\beta} + \bar{\bar{\beta}}}{\tilde{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}}} = \frac{w(1,t)\,\bar{w}(1,t)\,f(0,t)}{w(0,t)\,\bar{w}(0,t)\,f(1,t)} \qquad (95)$$

б) В случае непрерывного процесса Маркова, соответствующего оператору (58), имеем уравнение первого рода

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial(aw)}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2(bw)}{\partial x^2} + \frac{w}{k}\left\{y\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - M\left[y\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right]\right\}. \qquad (96)$$

Обращаясь к (89), (90), найдем функции $\tilde{a}(x,t), \tilde{b}(x,t)$, описывающие прямой условный процесс, и функции $\bar{\bar{a}}(x,t), \bar{\bar{b}}(x,t)$, соответствующие обратному

процессу. Используя также (60), приведем несколько эквивалентных выражений

$$\tilde{a} = a + b\left(\frac{1}{\bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\bar{a} + \frac{1}{\bar{w}}\frac{\partial (b\bar{w})}{\partial x};$$

$$\tilde{\bar{a}} = -a + \frac{1}{w}\frac{\partial (bw)}{\partial x} = \bar{a} + b\left(\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right); \tag{97}$$

$$b = \bar{b} = \tilde{b} = \tilde{\bar{b}},$$

из которых видна полная симметрия относительно знака времени.

в) При чисто разрывном исходном процессе, условный процесс также будет чисто разрывным. Плотность скачков $\tilde{\beta}(x, t)$ и плотность вероятности перехода из x' в x условного процесса равны

$$\tilde{\beta}(x', t) = \frac{f(x', t)}{\bar{w}(x', t)}\beta(x', t)\int \frac{\bar{w}(x, t)}{f(x, t)} W(x, x', t)\, dx; \tag{98}$$

$$\tilde{W}(x, x', t) = \frac{\dfrac{\bar{w}(x, t)}{f(x, t)} W(x, x', t)}{\displaystyle\int \frac{\bar{w}(z, t)}{f(z, t)} W(z, x', t)\, dz}. \tag{99}$$

Условному процессу, протекающему в обратном времени, соответствуют следующие выражения для плотности скачков и вероятности перехода из x в x':

$$\bar{\beta}(x, t) = \frac{1}{w(x, t)}\int W(x, x', t) w(x', t) \beta(x', t)\, dx';$$

$$\bar{W}(x, x', t) = \frac{1}{\bar{\beta}(x, t) w(x, t)} W(x, x', t) \beta(x', t) w(x', t). \tag{100}$$

В заключение отметим, что финальные вероятности определяют начальные условия не только для уравнений, соответствующих условному процессу Маркова, протекающему внутри интервала наблюдения $0 < t < T$. Вне интервала наблюдения условный процесс имеет те же вероятности перехода и описывается теми же уравнениями, что и априорный процесс. В качестве же начального условия для области $t > T$ следует брать вероятности $w(x, T)\,\delta(y, y(T))$ при $t = T$. Области $t < 0$ соответствуют при $t = 0$ «начальные» (в обращенном времени) вероятности $\bar{w}(x, 0)\,\delta(y, y(0))$, $\delta(y, y')$ — дельта-функция такая, что первым вероятностям соответствуют средние

$$M\Phi(x, y) = \sum_x \Phi(x, y(T))\, w(x, T).$$

§ 4. Уравнение первого рода для непрерывного условного процесса Маркова

Рассмотрим другой частный случай условного процесса Маркова, а именно случай непрерывного процесса, протекающего в непрерывном времени, и выведем для него дифференциальное уравнение.

Пусть имеется многомерный непрерывный процесс Маркова, состоящий из компонент $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, для которого

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M\Delta x_k = a_k \quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M\Delta x_k\Delta x_l = b_{kl};$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M\Delta x_{k_1}\ldots\Delta x_{k_r} = 0 \quad \text{при } r>2, \tag{101}$$

$$(\Delta x_k = x_k(t+\Delta) - x_k(t);\ k, l = 1, \ldots, n).$$

Пусть далее реализации части компонент являются известными:

$$x_{m+1}(t) = y_{m+1}(t);\ \ldots,\ x_n(t) = y_n(t), \quad (0<m<n). \tag{102}$$

Тогда остальные компоненты $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ образуют условный процесс Маркова, относительно которого можно утверждать следующее:

Если матрица

$$\| b_{\sigma\rho} \| = \begin{Vmatrix} b_{m+1,\,m+1}\ldots b_{m+1,\,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,\,m+1}\ldots b_{nn} \end{Vmatrix} \tag{103}$$

имеет обратную матрицу $\| c_{\sigma\rho} \| = \| b_{\sigma\rho} \|^{-1}$ *и ее элементы не зависят от* $x_1, \ldots, x_m$, *то плотность распределения вероятности* $w(x_1, \ldots, x_m)$ *условного процесса удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{[a_\alpha + b_{\alpha\sigma}c_{\sigma\rho}(\dot{y}_\rho - a_\rho)]w\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\{[b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma}c_{\sigma\rho}b_{\rho\beta}]w\}$$

$$+ [a_\sigma c_{\sigma\rho}\left(\dot{y}_\rho - \frac{a_\rho}{2}\right) - \int a_\sigma c_{\sigma\rho}\left(\dot{y}_\rho - \frac{a_\rho}{2}\right) w dx_1 \ldots dx_m]w. \tag{104}$$

Здесь, как и в дальнейшем применяются следующие обозначения; подразумевается суммирование по дважды встречающимся индексам: индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ принимают значения от 1 до m, а индексы $\sigma, \rho, \tau, \varphi, \ldots$ — от $m+1$ до n. Кроме того, мы будем использовать обозначения $k, l, p, q, \ldots$ для индексов, принимающих значения от 1 до n, и записывать $w(x_\alpha)$, $\theta(u_k)$, dx_α вместо $w(x_1, \ldots, x_m)$, $\theta(u_1, \ldots, u_n)$, $dx_1, \ldots dx_m$ и т. п.

В правую часть уравнения (104) линейно входят производные $\dot{y}_\rho = dy_\rho/dt$, что является принципиальным. Поскольку решение указанного уравнения зависит от $\dot{y}_\rho$ интегральным образом, эти производные можно понимать в смысле теории обобщенных функций.

Чтобы определить условный процесс Маркова, будем рассматривать значения случайных функций лишь в дискретные моменты времени $t_j = t_0 + j\Delta$ (j — целое число), воспользуемся определением условной цепи Маркова, и затем перейдем к пределу $\Delta \to 0$. Согласно формуле обратной вероятности, имеем

$$w(x_\alpha(t_j)) = \lim_{\Delta\to 0} C_1 \int\ldots\int w(x_\alpha(t_j), y_\sigma(t_j); x_\beta(t_j-\Delta), y_\rho(t_j-\Delta),$$

$$x_\gamma(t_j-2\Delta),\ y_\tau(t_j-2\Delta), \ldots) dx_\delta(t_j-\Delta)\, dx_\varepsilon(t_j-2\Delta)\ldots \tag{105}$$

Здесь C_1 — нормировочная постоянная, не зависящая от x_α. Совместную плотность распределения вероятности, стоящую в (105) под знаком интеграла, можно записать через вероятность перехода $w_\Delta(x_k, x_l')$ и начальную вероятность

$$w(x_k(t_j), x_l(t_j - \Delta), \ldots) = w_\Delta(x_k(t_j), x_l(t_j - \Delta)) \ldots$$

$$\ldots w(x_p(t_0 + \Delta), x_q(t_0))\, w(x_r(t_0)). \tag{106}$$

Из (105) и (106) вытекает закон изменения условной плотности вероятности при увеличении времени:

$$w(x_\alpha(t_j)) = \lim_{\Delta \to 0} C_2 \int \ldots \int w_\Delta(x_\alpha(t_j), y_\sigma(t_j); x_\beta(t_j - \Delta), y_\rho(t_j - \Delta)) \ldots .$$

$$\ldots w_\Delta(x_\tau(t_i + \Delta),\ y_\tau(t_i + \Delta);\ x_\delta(t_i);\ y_\varphi(t_i))\, w(x_\varepsilon(t_i))\, dx_\zeta(t_j - \Delta) \ldots dx_\eta(t_i) \tag{107}$$

Преобразование (107) от t_i до $t_j = t_i + \tau$ складывается из $j - i = \tau/\Delta$ шагов. Преобразование за один шаг имеет вид

$$w(x_\alpha) = C_\Delta \int w_\Delta(x_\alpha,\ y_\sigma;\ x_\beta', y_\rho')\, w'(x_\tau')\, dx_\delta'. \tag{108}$$

Если вероятность перехода записать в форме

$$w_\Delta(x_\alpha, y_\sigma; x_\beta', y_\rho') = (2\pi)^{-m} \int F(iu_\tau, x_\beta')\, e^{-iu_\alpha (x_\alpha - x_\alpha')}\, du_\sigma, \tag{109}$$

где

$$F(iu_\alpha, x_\beta') = \int e^{iu_\alpha \Delta x_\alpha}\, w_\Delta(x_\beta' + \Delta x_\beta, y_\sigma; x_\tau', y_\rho')\, d\Delta x_\delta, \tag{110}$$

то будем иметь

$$w(x_\alpha) = C_\Delta (2\pi)^{-m} \int\int F(iu_\tau, x_\beta')\, e^{-iu_\alpha (x_\alpha - x_\alpha')}\, w'(x_\delta')\, du_\varepsilon dx_\zeta.$$

Заменяя здесь $F(iu_\tau, x_\beta') e^{-iu_\alpha (x_\alpha - x_\alpha')}$ на $F\left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau},\ x_\beta'\right) e^{-iu_\alpha (x_\alpha - x_\alpha')}$ и производя интегрирование по u_α, получаем

$$w(x_\alpha) = C_\Delta \int F\left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}, x_\beta'\right) \delta(x_\alpha - x_\alpha')\, w'(x_\delta')\, dx_\zeta'. \tag{111}$$

Найденное преобразование можно записать в форме

$$w(x_\alpha) = C_\Delta F\left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau},\ x_\beta\right) w'(x_\alpha), \tag{112}$$

если условиться, что в функции F, представленной разложением

$$F\left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau},\ x_\beta\right) = \sum F_{\gamma_1 \ldots \gamma_s \beta_1 \ldots \beta_s} \left(-\frac{\partial}{\partial x_{\gamma_1}}\right) \ldots \left(-\frac{\partial}{\partial x_{\gamma_s}}\right) x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_s} \tag{113}$$

оператор дифференцирования действует всегда после умножения на x_β.

Согласно (108), (112), формулу (107) можно записать

$$w(x_\alpha, t) = \lim_{\Delta \to 0} C_2 \Pi C_\Delta F\left(-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}, x_\beta\right) w(x_\alpha, t), \tag{114}$$

где число последовательно действующих операторов равно $j - i$.

Функцию $F(iu_\alpha, x_\beta)$ удобно выразить через характеристическую функцию приращений

$$\theta(u_k) = Me^{iu_k \Delta x_k}.$$

В самом деле, записывая обратное соотношение

$$w_\Delta(x_k + \Delta x_k, x_l) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iu_k \Delta x_k}\, \theta(u_l)\, du_\rho \tag{115}$$

и подставляя его в (110), получаем

$$F(iu_\alpha, x_\beta) = (2\pi)^{m-n} \int e^{-iu_\sigma \Delta y_\sigma}\, \theta(u_l)\, du_\rho. \tag{116}$$

Найдем конкретный вид функции $F(iu_\alpha, x_\beta)$ для заданного процесса Маркова. Из (101) можно получить

$$\theta(u_k) = \exp\left\{a_k iu_k \Delta + \frac{1}{2} b_{kl} iu_k iu_l \Delta + O(\Delta^2)\right\}. \tag{117}$$

Подставляя это выражение в (116), записывая суммы $a_k u_k$, $b_{kl} u_k u_l$ в виде $a_\alpha u_\alpha + a_\sigma u_\sigma$, $b_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + 2b_{\alpha\sigma} u_\alpha u_\sigma + b_{\sigma\rho} u_\sigma u_\rho$ и производя интегрирование, будем иметь

$$F(iu_\alpha, x_\beta) = (2\pi)^{\frac{m-n}{2}} \operatorname{Det}^{-\frac{1}{2}} \| b_{\tau\varphi} \| \exp\{a_\alpha iu_\alpha \Delta + \frac{\Delta}{2} b_{\alpha\beta} iu_\alpha iu_\beta -$$

$$- \frac{1}{2\Delta} c_{\sigma\rho} (a_\sigma \Delta + b_{\sigma\alpha} iu_\alpha \Delta - \Delta y_\sigma)(a_\rho \Delta + b_{\rho\beta} iu_\beta \Delta - \Delta y_\rho) + O(\Delta^2)\}$$

или

$$F(iu_\alpha, x_\beta) = C \exp\{L(iu_\alpha, x_\beta)\, \Delta + O(\Delta^2)\}, \tag{118}$$

где

$$L(iu_\alpha, x_\beta) = \left[a_\alpha + b_{\alpha\sigma} c_{\sigma\rho} \left(\frac{\Delta y_\rho}{\Delta} - a_\rho\right)\right] iu_\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} (b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma} c_{\sigma\rho} b_{\rho\beta})\, iu_\alpha iu_\beta + a_\sigma c_{\sigma\rho} \left(\frac{\Delta y_\rho}{\Delta} - \frac{a_\rho}{2}\right), \tag{119}$$

а

$$C = (2\pi)^{\frac{m-n}{2}} \operatorname{Det}^{-\frac{1}{2}} \| b_{\tau\varphi} \| \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta} c_{\sigma\rho} \Delta y_\sigma \Delta y_\rho\right\}$$

— постоянная, не зависящая от u_α и x_β.

Согласно формулам (112), (114), в (118) следует заменить iu_α на опера-

тор дифференцирования $-\partial/\partial x_\alpha$ и учесть порядок его действия (113). Обозначим через

$$L(t_\lambda) = L\left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, x_\beta\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[a_\alpha + b_{\alpha\sigma}c_{\sigma\rho}\left(\frac{\Delta y_\rho}{\Delta} - a_\rho\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}[b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\sigma}c_{\sigma\rho}b_{\rho\beta}] + a_\sigma c_{\sigma\rho}\left(\frac{\Delta y_\rho}{\Delta} - \frac{a_\rho}{2}\right) \qquad (120)$$

—оператор, соответствующий моменту времени t_λ ($\lambda = i, \ldots, j$).

Разлагая $e^{L\Delta}$ в ряд и меняя порядок дифференцирования, находим, что оператор (113) отличается от $e^{L\Delta}$ лишь членами вида

$$\Delta^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} g_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} g_\beta - \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} g_\alpha g_\beta = -\Delta^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\beta} g_\beta \text{ и т. д.}$$

$$(g_\alpha = a_\alpha + b_{\alpha\sigma}c_{\sigma\rho}(\Delta y_\rho/\Delta - a_\rho)),$$

имеющими порядок малости Δ^2 и выше. Поэтому (114) можно записать

$$\dot{w}(x_\alpha, t_j) = \lim_{\Delta\to 0} C_2(\Pi C_\Delta C) e^{L(t_j-\Delta)\Delta} \ldots e^{L(t_i)\Delta} w(x_\alpha, t_i). \qquad (121)$$

Функция

$$f(x_\alpha, t_j) = e^{L(t_j-\Delta)\Delta} \ldots e^{L(t_i)\Delta} w(x_\alpha, t_i)$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial f} = L_\Delta(t) f,$$

где

$$L_\Delta(t) = L(t_\lambda) \text{ при } t_\lambda + \Delta > t \geqslant t_\lambda \qquad (122)$$

$$(\lambda = i, \ldots, j-1)$$

Нормированная функция

$$w_\Delta(x_\alpha, t) = \frac{f(x_\alpha, t)}{N(t)}, \qquad (N(t) = \int f(x_\alpha, t)\, dx_\beta),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw_\Delta}{dt} = \left[L_\Delta(t) - \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\right] w_\Delta = \left[L_\Delta(t) - \int L_\Delta w_\Delta dx_\beta\right] w_\Delta. \qquad (123)$$

Если совершить предельный переход $\Delta \to 0$, то w_Δ обратится в условную плотность распределения вероятности (121), а уравнение (123) вследствие (120), (122) будет совпадать с уравнением (104), справедливость которого требовалось доказать.

Пример. Пусть известна реализация суммы $y(t) = x(t) + \xi(t)$, где $x(t)$, $\xi(t)$ — непрерывные процессы Маркова, независимые друг от друга, причем

$$\lim_{\Delta\to 0} M\frac{\Delta x}{\Delta} = a_x; \qquad \lim_{\Delta\to 0} M\frac{\Delta\xi}{\Delta} = a_\xi;$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta} M(\Delta x)^2 = b_x; \qquad \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta} M(\Delta\xi)^2 = b_\xi.$$

В данном случае функции (101), характеризующие процесс $x(t)$, $y(t)$, суть

$$a_1 = a_x;\ a_2 = a_x + a_\xi,$$

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_x;\ b_{22} = b_x + b_\xi.$$

Условия применимости формулы (104) принимают вид

$$b_x + b_\xi \neq 0;\ \frac{\partial b_x}{\partial x} = 0.$$

При выполнении последних условный процесс $x(t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial w(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[a_x + \frac{b_x}{b_x + b_\xi}(\dot{y} - a_x - a_\xi)\right] w\right\} + \frac{1}{2}\frac{b_x b_\xi}{b_x + b_\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ \left\{\frac{a_x + a_\xi}{b_x + b_\xi}\left(\dot{y} - \frac{a_x + a_\xi}{2}\right) - \int \frac{a_x + a_\xi}{b_x + b_\xi}\left(\dot{y} - \frac{a_x + a_\xi}{2}\right) w dx\right\} w.$$

Автор выражает благодарность акад. А. Н. Колмогорову и другим участникам научного семинара кафедры теории вероятностей МГУ за плодотворную дискуссию затронутых вопросов.

Поступила в редакцию
10.2.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, М., 1954.
[2] А. Н. Колмогоров, Zur Umkehrbarkeit der Statistischen Naturgesetze, Math. Ann., 113, 1937, 766—772.
[3] А. Н. Колмогоров, Zur Theorie der markoffschen Ketten, Math. Ann., 112, 1935, 155—160.
[4] Р. Л. Стратонович, К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций, Теория вероят. и ее примен. **IV**, 2, (1959), 239.

CONDITIONAL MARKOV PROCESSES

R. L. STRATONOVICH *(MOSCOW)*

(Summary)

Relationships are given between the probabilities of conditional Markov chains for neighboring tests. The conditional probabilities at the end of the observation interval (the final probabilities) are satisfied with first-type equations corresponding to an increase in the observation interval. The second-type equations for the conditional probabilities within the observation interval are written in terms of these final probabilities.

The following special cases are considered. Gaussian noise with independent values which becomes a delta-correlational process when the moments of time are compacted, and a continuous Markov process.

The related problem of the time sign reversal of ordinary (a priori) Markov processes is treated in a by-way.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том V *1960* *Выпуск 2*

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОЗВРАТНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ

В работах [1] и [2] для одномерных возвратных процессов диффузионного типа доказано существование и единственность инвариантной меры и эргодические свойства. В настоящей заметке некоторые из этих результатов переносятся на процессы в любом фазовом пространстве. Кроме того, при некоторых предположениях устанавливаются асимптотические свойства решений задачи Коши для параболического дифференциального уравнения при $t \to +\infty$. А. М. Ильиным при других предположениях получены некоторые из этих свойств [22].

Мы пользуемся в дальнейшем терминологией и обозначениями книги [3].

§ 1. Определение и свойства диффузионного процесса

Пусть (E, ρ) — σ-компактное полное метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра измеримых множеств этого пространства, порожденная открытыми множествами. Мы будем считать заданной марковскую переходную функцию $P(t, x, A)$ $(x \in E, A \in \mathfrak{B}, t \geqslant 0)$. Наряду с обычными свойствами этой функции [3] мы будем предполагать, что $P(t, x, E) = 1$ при всех $t \geqslant 0$ (т. е. соответствующий марковский процесс не обрывается). Будут предполагаться выполненными кроме того следующие условия 1° — 3°.

1°. *Для любой* ε *— окрестности* $U_\varepsilon(x)$ *точки* x $1 - P(t, x, U_\varepsilon(x)) = o(t)$ *равномерно по* x *в любом компакте* $K \subset E$.

2°. *Для любой ограниченной* $\mathfrak{B}$ *— измеримой функции* f *и при каждом* $t > 0$ $T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y)$ определяет непрерывную по x функцию**.

---

* *Примечание при корректуре*. После того, как настоящая работа была сдана в печать, появилась новая статья Г. Танака и Х. Маруяма (Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A—XIII, 2 (1959), 157—172), в которой при несколько иных предположениях доказаны в основном те же результаты, что и в §§ 1—3 настоящей работы. Однако методы доказательства различны, в частности доказательство теоремы 2.1 кажется нам проще соответствующего доказательства в цитированной работе.

** Это свойство подробно изучалось Гирсановым в [19]. Процессы, для которых выполнено 2°, в [19] названы сильно феллеровскими.

3°. *Для любого* $x \in E$, $t > 0$ *и для любого открытого множества* U *верно соотношение*: $P(t, x, U) > 0$ *.

Известно [3], что при выполнении этих условий существует однородный марковский процесс $X = \{X_t, +\infty, M_t, \mathbf{P}_x, \theta_t\}$, который обладает также следующими свойствами:

4° *Для любого компакта* K *и любого* $s > 0$

$\mathbf{P}_x[\{X_t \in K,\ 0 \leqslant t \leqslant s\} \cap \{X_t$ имеет разрыв при $0 \leqslant t \leqslant s\}] = 0$.

5°. *Процесс* X *строго марковский.*

Процесс, для которого выполнены условия 1° — 5°, мы назовем диффузионным.

Пусть U — область с границей Γ, τ_Γ — момент первого достижения Γ траекторией процесса. Процесс X обладает следующими важными свойствами.

6°. *Функции* $\mathbf{P}_x\{X_{\tau_\Gamma} \in \gamma\} = \pi_\Gamma(x, \gamma)$, $\mathbf{P}_x\{\tau_\Gamma > t\}$ *непрерывны по* x *для* $x \in U$.

7°. *При каждом* $t > 0$ *и* $x \in E$ меры $P(t, x, A)$ *эквивалентны* (*т. е. абсолютно непрерывны одна по другой*).

Свойство 6° следует из более общего утверждения доказанного в [19]

Доказательство 7°. Пусть множество $A \subset \mathfrak{B}$ таково, что $P(t_0, x_0, A) > 0$ при некоторых $x_0 \in E$ и $t_0 > 0$. Из соотношения $P(t_0, x_0, A) = \int\limits_E P(t_0 - h, x_0, dy)\, P(h, y, A)$ ясно, что существует точка $y_0 \in E$ такая, что $P(h, y_0, A) > 0$. Из 2° следует, что для некоторого открытого множества U (содержащего y_0) $P(h, x, A) > 0$ для всех $x \in U$. Отсюда, используя свойство 3°, получим при всех $x \in E$:

$$P(2h, x, A) \geqslant \int\limits_U P(h, x, dy)\, P(h, y, A) > 0$$

при любом достаточно малом h. Для $x \in E$, $t > 0$ получим, выбрав $2h < t$,

$$P(t, x, A) = \int\limits_E P(t - 2h, x, dy)\, P(2h, y, A) > 0.$$

В большей части изложения будет предполагаться выполненным, кроме того, условие

8°. *Существует компакт* K *такой, что для всякой точки* $x \in E$ $\mathbf{P}_x\{$найдется t такое, что $X_t \in K\} = 1$

Процесс, для которого выполнено условие 8°, назовем *возвратным*.

Для возвратного диффузионного процесса легко доказать следующее свойство.

9°. *Траектория* X_t *процесса всюду плотна в* E *с вероятностью* 1. (В частности, условие 8° выполнено для любого компакта, содержащего открытое множество).

---

* Условия 1° — 3° не являются необходимыми для справедливости большинства доказанных результатов. Условие 1°, например, можно было бы заменить условием непрерывности процесса справа и равномерной в каждом компакте стохастической непрерывностью. Однако такая замена, не изменив существа, сделала бы доказательства более громоздкими.

В самом деле, в силу свойств 2° и 3° для $t>0$ и любого открытого множества U $\inf\limits_{x\in K} P(t, x, U)>0$. Используя это обстоятельство и свойство 8°, получим, что траектория процесса с вероятностью 1 достигает множества U. Следовательно, с вероятностью 1 она достигнет каждой окрестности всех множеств, составляющих счетную базу пространства E.

§ 2. Существование инвариантной меры

Будем говорить, что мера μ является инвариантной для процесса X, если $\mu \not\equiv 0$ и при $A\in\mathfrak{B}$

$$\mu(A)=\int_E \mu(dx)\,P(t, x, A). \tag{1}$$

Соотношение (1) эквивалентно соотношению:

$$\int_E f(x)\,\mu(dx)=\int_E T_t f(x)\,\mu(dx) \tag{1'}$$

для любой непрерывной на E и равной нулю вне компакта функции $f(x)$.

Заметим, что из 3° и 7° следует, что если существует мера, удовлетворяющая уравнению (1), то она эквивалентна $P(t, x, A)$.

Пусть X — возвратный диффузионный процесс. Изложим конструкцию, которая играет основную роль в дальнейшем. (Эта конструкция для других целей вводилась также в работе автора [9]. Аналогичная конструкция применялась Харрисом в [6] для доказательства существования и единственности инвариантной меры у некоторого класса процессов с дискретным временем.)

Пусть $G\subset G_1$ — открытые множества из E с компактными границами Γ и Γ_1 такие, что $\rho(\Gamma, \Gamma_1)>0$. Обозначим τ_1, момент первого попадания на Γ, τ_1' — момент первого попадания на Γ_1, которое произошло после τ_1; $\tau_i(\tau_i')$ — момент первого попадания на $\Gamma(\Gamma_1)$, которое произошло после τ_{i-1} (τ_i).

Участок траектории процесса X_t при $\tau_i<t<\tau_{i+1}$ назовем i-ым циклом, при $\tau_i<t<\tau_i'$ — первым полуциклом этого цикла при $\tau_i'<t<\tau_{i+1}$ — вторым полуциклом; время $\tau_{i+1}-\tau_i$ одного цикла в тех случаях, когда речь будет идти ровно об одном цикле, будем обозначать τ без индекса. Последовательность $X(\tau_i)=\widetilde{X}_i$ представляет собой, как нетрудно проверить, используя 8° и 5°, однородную цепь Маркова на Γ. Переходная вероятность этой цепи $\pi(x, \gamma)$ $(x\in\Gamma_1;\ \gamma\in\mathfrak{B}_1;\ \mathfrak{B}_1$ — σ-алгебра, порожденная открытыми множествами из $\Gamma)$ определяется формулой

$$\pi(x, \gamma)=\int_{\Gamma_1}\pi_{\Gamma_1}(x, dy)\,\pi_\Gamma(y, \gamma). \tag{2}$$

Замечание об обозначениях. В дальнейшем всюду вероятности, связанные с моментом первого достижения τ_U множества U, мы будем обозначать π_U. В частности, $\pi_U(x, \gamma)=\mathbf{P}_x\{\tau_U\in\gamma\}$. [Вероятности, связанные с циклом, будем обозначать π без индекса: $\pi(x, \gamma)=\mathbf{P}_x\{X(\tau)\in\gamma\}$ $(x\in\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Цепь Маркова* $\widetilde{X}_i$ *имеет конечную инвариантную меру, т. е. существует конечная мера* $\widetilde{\mu}(\gamma)$ *такая, что*

$$\widetilde{\mu}(\gamma) = \int_{\Gamma} \pi(x, \gamma)\, \widetilde{\mu}(dx); \quad \gamma \in \mathfrak{B}_1. \tag{3}$$

Из (2) и 6° следует, что функция $\pi(x, \gamma)$ непрерывна по x. Кроме того множество Γ — фазовое пространство цепи X_i — компактно. Легко показать, что этих двух обстоятельств достаточно для существования конечной инвариантной меры μ (см. [7]). Для дальнейшего нам полезно будет записать (3) в другой форме

$$\int_0 f(x)\, \widetilde{\mu}(dx) = \int_{\Gamma} \mathbf{M}_x f(\widetilde{X}_1)\, \widetilde{\mu}(dx). \tag{3'}$$

Обозначим $\chi_A(x)$ характеристическую функцию множества A.

Тогда $\tau^A = \int_0^{\tau} \chi_A(X_t)\, dt$ есть время, проведенное в множестве A траекторией процесса за один цикл.

Лемма 2. 2. *Для любого компактного множества* A $\sup\limits_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_x \tau^A < +\infty$.

Доказательство. Имеем

$$\tau^A = \int_0^{\tau'} \chi_A(X_t)\, dx + \int_{\tau'}^{\tau} \chi_A(X_t)\, dt = \tau_1^A + \tau_2^A.$$

(Здесь τ' — время первого полуцикла). Докажем сначала, что

$$\sup_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_x \tau_2^A < +\infty. \tag{4}$$

Обозначим τ_Γ^A — время, проведенное в A до достижения Γ траекторией процесса. Очевидно, что $\sup\limits_{x \in \Gamma} \mathbf{M}_x \tau_2^A \leqslant \sup\limits_{x \in E} \mathbf{M}_x \tau_\Gamma^A$. Случайную величину $\tau(t)$ определим как нижнюю грань решений уравнения $t = \int_0^{\tau(t)} \chi_A(X_s)\, ds$. Величина $\tau(t)$ не зависит от будущего, так как

$$\{\tau(t) > T\} = \left\{ \int_0^T \chi_A(x_s)\, ds < t \right\} \in M_T$$

Положим $B_t = \{\tau_\Gamma^A > t\}$. Из 6° следует, что вероятность $\mathbf{P}_x(B_t)$ непрерывно зависит от x при $x \in A$, а при каждом $x \in A$ в силу 3° $\mathbf{P}_x(B_t) < 1$. Поэтому

$$\sup_{x \in A} \mathbf{P}_x\{B_t\} = \alpha < 1. \tag{5}$$

Ясно, далее, что $B_{2t} = B_t \cap \theta_{\tau(t)} B_t$. В силу 4° с вероятностью 1 $X_{\tau(t)} \in A$. Отсюда, используя 5° и (5), получим

$$\mathbf{P}_x\{B_{2t}\} = \mathbf{P}_x\{B_t \cap \theta_{\tau(t)} B_t\} = \int_{B_t} \mathbf{P}_{X_{\tau(t)}}\{B_t\}\, \mathbf{P}_x(d\omega) \leqslant \alpha \mathbf{P}_x\{B_t\} \leqslant \alpha^2.$$

Значит и $\sup_{x\in A}\mathbf{P}_x\{B_{2t}\}\leqslant\alpha^2$. Точно так же и при любом целом $n>0$ $\sup_{x\in A}$ $\mathbf{P}_x\{B_{nt}\}\leqslant\alpha^n$.

Далее имеем:

$$\sup_{x\in A}\mathbf{M}_x\tau_\Gamma^A\leqslant\sup_{x\in A}\sum_{n=1}^{\infty}nt\,\mathbf{P}_x\{(n-1)t\leqslant\tau_\Gamma^A<nt\}\leqslant$$

$$\leqslant t\sup_{x\in A}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{P}_x\{\tau_\Gamma^A\geqslant(n-1)t\}\leqslant t\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^{n-1}<\infty.$$

Отсюда следует (4). Аналогично показывается, что $\sup_{x\in\Gamma}\mathbf{M}_x\tau_1^A<+\infty$.

Теорема 2.1. *У возвратного диффузионного процесса существует σ-конечная инвариантная мера* μ, *задаваемая формулой*:

$$\mu(A)=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\tau^A. \tag{6}$$

Доказательство. Легко проверить, что выражение (6) задает меру. Из леммы 2.2 следует, что она σ-конечна. При этом для любой непрерывной и равной нулю вне компакта функции $f(x)$

$$\int_E f(x)\,\mu(dx)=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^\tau f(X_t)\,dt. \tag{6'}$$

Для доказательства инвариантности меры $\mu(A)$ нам понадобится следующее тождество, доказательство которого дано в [9].

$$\mathbf{M}_x\int_0^\tau\mathbf{M}_{x_s}\xi\,ds=\mathbf{M}_x\int_0^\tau\theta_s\xi\,ds \tag{7}$$

для любой случайной величины ξ и не зависящей от будущего случайной величины τ. Применяя (6'), (7) и делая замену переменной, получим:

$$\int_E T_tf(x)\,\mu(dx)=\int_E\mathbf{M}_xf(X_t)\,\mu(dx)=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^\tau\mathbf{M}_{X_s}f(X_t)\,ds=$$

$$=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^\tau\theta_sf(X_t)\,ds=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^\tau f(X_{t+s})\,ds=$$

$$=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_t^{t+\tau}f(X_u)\,du=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^\tau f(X_u)\,du+$$

$$+\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_\tau^{\tau+t}f(X_u)\,du-\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^t f(X_u)\,du. \tag{8}$$

Из (3′) следует, что

$$\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_\tau^{\tau+t}f(X_u)\,du=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x_1}\int_0^t f(X_u)\,du=\int_\Gamma\tilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\int_0^t f(X_0)du. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает (1′).

§ 3. Единственность инвариантной меры

Для доказательства единственности инвариантной меры мы пользуемся методом Джуна [1]. Поэтому мы будем опускать детали в тех местах, где они несущественно отличаются от [1].

Теорема 3.1. *Пусть* $\mu(A)$ *— инвариантная мера возвратного диффузионного процесса, сконструированная согласно* (6), *а* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по мере* μ, *причем* $\int_E g(x)\,\mu(dx) \neq 0$. *Тогда для всех* $x \in E$

$$\mathbf{P}_x\left\{\frac{\int_0^T f(x_t)\,dt}{\int_0^T g(x_t)\,dt} \longrightarrow \frac{\int_E f(x)\,\mu(dx)}{\int_E g(x)\,\mu(dx)}\right\} = 1. \tag{10}$$

Докажем сначала (10) для начального распределения

$$\mathbf{P}\{X_0 \in \gamma\} = \tilde{\mu}(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma.$$

При этом предположении последовательность случайных величин $\eta_n = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} f(X_t)\,dt$ образует стационарную в узком смысле случайную последовательность, причем из (6) следует, что $\mathbf{M}\eta_n = \int_E f(x)\,\mu(dx)$.

Обозначим $\nu(T)$ — число циклов за время T.
Ясно, что

$$\int_0^T f(X_t)\,dt = \int_0^{\tau_1} f(X_t)\,dt + \sum_{n=1}^{\nu(T)-1} \eta_n + \int_{\tau_{\nu(T)}}^T f(X_t)\,dt.$$

Повторяя дальше почти дословно рассуждения [1] (вместо усиленного закона больших чисел для сумм независимых случайных величин, примененного в [1], нам придется воспользоваться аналогичной теоремой для стационарных в узком смысле случайных последовательностей)*, мы получим, что (10) справедливо для почти всех по мере $\tilde{\mu}(\gamma)$ начальных точек $x \in \Gamma$. Отсюда, применив тот же прием, что и в [10] (стр. 201–202), получим, что (10) справедливо для всех $x \in \Gamma$, а затем и для всех $x \in E$.

Следствие. *Если* $\mu(E) < +\infty$, *то для любой ограниченной* $f(x)$ *имеет место соотношение:*

$$\frac{\int_0^T T_t f(x)\,dt}{T} \longrightarrow \frac{\int_E f(x)\,\mu(dx)}{\mu(E)} \quad \text{при } T \to \infty.$$

---

* Легко показать, опираясь, например, на результаты [7], что процесс $\{\eta_n\}$ метрически транзитивен в нашем случае.

В частности $\frac{1}{T}\int_0^T P(t, x, A)\,dt \longrightarrow \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$ *при* $T \to \infty$. *Если же* $\mu(E) = +\infty$, *то для любой ограниченной интегрируемой по мере* $\mu(A)$ *функции* $f(x)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T T_t f(x)\,dt \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Если $\mu(E) < +\infty$, то наше утверждение сразу следует из (10) и теоремы Лебега об интегрировании предела в случае ограниченной сходимости. Докажем утверждение для случая $\mu(E) = +\infty$. Пусть найдется последовательность $T_n \to +\infty$ такая, что

$$\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} |f(X_t)|\,dt \geqslant c \quad . \tag{11}$$

с положительной вероятностью для $X(0) = x$. Выберем компактное множество K так, чтобы $\mu(K) > \frac{1}{c}\int_E |f(x)|\,\mu(dx)$. Из (11) следует, что с положительной вероятностью

$$\frac{\int_0^T |f(X_t)|\,dt}{\int_0^{T_n} \chi_K(X_t)\,dt} \geqslant c.$$

С другой стороны, на основании теоремы 3.1. с вероятностью 1

$$\frac{\int_0^{T_n} |f(\chi_t)|\,dt}{\int_0^{T_n} \chi_K(\chi_t)\,dt} \to \frac{\int_E |f(x)|\,\mu(dx)}{\mu(K)} < c \text{ при } T \to \infty.$$

Из полученного противоречия следует, что $\frac{\int_0^T f(X_t)\,dt}{T} \to 0$ с вероятностью 1. Применяя снова теорему Лебега, получим доказываемое утверждение.

Теорема 3.2. *У возвратного диффузионного процесса инвариантная мера единственна с точностью до мультипликативной постоянной.*

После того, как уже доказано соотношение (10), доказательство этой теоремы, данное в [1] для одномерных процессов, без изменений переносится на наш случай.

Обозначим C_K событие, состоящее в том, что множество K не достигается траекторией процесса ни при каком t. Следующая лемма при более узких предположениях доказана в [11].

Лемма 3.1. *Если процесс* X *невозвратен, то для любого компактного множества* K *и равномерно по* $x \in E$

$$\mathbf{M}_x \int_0^\infty \chi_K(X_t)\,dt = \int_0^\infty P(t, x, K)\,dt < +\infty.$$

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in E \setminus K$ выбрана так, что $\mathbf{P}_{x_0}\{C_K\} > 0$. Так же, как и свойство 6°, доказывается, что функция $\mathbf{P}_x\{C_K\}$ непрерывна по x при $x \in E \setminus K$. Пусть U_{x_0} — окрестность точки x_0, в которой $\mathbf{P}_x\{C_K\} \geqslant \alpha > 0$. Обозначим C_K событие, состоящее в том, что общее время, проведенное траекторией процесса X в множестве K, больше T. Ясно, что

$$1 - \mathbf{P}_x\{C_K^{(T)}\} \geqslant P(T, x, U_{x_0}) \inf_{y \in U_{x_0}} \mathbf{P}_y\{C_K\}.$$

Используя свойства 2°, 3° и компактность множества K, получим $\inf_K P\{T, x, U_{x_0}\} = \beta > 0$. Поэтому для всех $x \in K$ и, значит, для всех $x \in E$

$$\mathbf{P}_x\{C_K^{(T)}\} \leqslant 1 - \alpha\beta = q < 1. \tag{12}$$

Из (12) получим утверждение леммы так же, как из неравенства (5) была получена лемма 2.2.

Следствие. *Если процесс невозвратен, то для любого компакта K*

$$P\{t, x, K\} \to 0 \quad \textit{при } t \to \infty. \tag{13}$$

Допустим, что найдется последовательность $t_n \to +\infty$ и $\delta > 0$ такие, что $P\{t_n, x, K\} > \delta$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим компакт $K' \supset K$ с границей Γ' такой, что $\rho(\Gamma', K) > 0$. Тогда для некоторого $h > 0$ $\sup_{K,\, 0 \leqslant s \leqslant h} P\{s, x, E \setminus K'\} < \frac{1}{2}$. Поэтому $P\{t_n + s, x, K'\} \geqslant P\{t_n, x, K\} \sup_K P\{s, y, K'\} \geqslant \frac{\delta}{2}$ для всех $0 \leqslant s \leqslant h$. Из последнего неравенства следует, что $\int_0^\infty P\{t, x, K'\}\, dt = +\infty$, что противоречит лемме 3.1. Полученное противоречие доказывает (13).

Теорема 3.3. *Для того чтобы у диффузионного процесса существовала конечная инвариантная мера, необходимо и достаточно, чтобы он был невозвратен и* $\int_\Gamma \tilde{\mu}(dx)\, \mathbf{M}_x \tau < +\infty$.

Достаточность следует из теоремы 2.1. Докажем необходимость. Пусть выполнены условия 1° — 3° и у процесса существует конечная инвариантная мера $\hat{\mu}$, которую мы будем предполагать нормированной. Обозначим K — компакт положительной меры $\hat{\mu}$ и предположим, что условие 4° не выполнено для K. Из леммы 3.1 следует, что равномерно по $x \in E$ при $T \to \infty$

$$\mathbf{M}_x\left[\frac{1}{T}\int_0^T \chi_K(X_t)\, dt\right] \to 0. \tag{14}$$

Отсюда и $\int_E \hat{\mu}(dx)\, \mathbf{M}_x\left[\frac{1}{T}\int_0^T \chi_K(X_t)\, dt\right] = \hat{\mu}(K) = 0$, что противоречит выбору

множества K. Выполнение условия 4° доказано. Применяя теперь теорему 3.2, мы получим, что $\int\limits_E \widetilde{\mu}(dx)\,\mathbf{M}_x\tau < +\infty$.

Теорема 3.4. *Если* $\mu(E) < +\infty$, *то для любого* $A \in \mathfrak{B}$

$$P(t, x, A) \to \frac{\mu(A)}{\mu(E)}. \qquad (15)$$

Для любой μ*-измеримой функции* $f(x)$

$$T_t f(x) \to \frac{\int\limits_E f(x)\,\mu(dx)}{\mu(E)}. \qquad (15')$$

Из теоремы 3.1. следует, что стационарный марковский процесс $\hat{X}$ с начальным распределением $\mu(E)$ эргодичен. Применяя теорему 5 из [12] к нашему случаю, получим (15) и (15′).

§ 4. Условие регулярности процесса

В предыдущих параграфах мы рассматривали необрывающийся диффузионный процесс в E. Однако часто бывают заданы лишь части $X^{(K_n)}$ процесса X в любом компакте K_n ($K_n \nearrow E$), содержащемся в E*. Согласно теореме, доказанной в монографии Дынкина [3], существует по крайней мере один процесс, часть которого в любом K_n совпадает с $X^{(K_n)}$. Однако будет ли такой процесс единственным? Будет ли он необрывающимся? Эти вопросы тесно связаны с вопросом о том, в какой мере расширенный в смысле Дынкина инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}$ (см. [13]) определяет процесс.

Для любого процесса, часть которого в K_n есть $X^{(K_n)}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), случайная величина τ_s — момент первого выхода из любого компакта, имеет одно и то же распределение.

Следуя Добрушину [20], процесс X назовем регулярным в области D, если $\tau_s = +\infty$ с вероятностью 1. Для регулярности процесса необходимо и достаточно, чтобы он единственным образом** определялся по своим частям в системе областей $\{K_n\}$. В самом деле, пусть с положительной вероятностью $\tau_s < +\infty$. Тогда существует бесчисленное множество процессов, части которых в K_n совпадают с $X^{(K_n)}$. Семейство таких процессов можно выделить, например, дополнительным условием $X^{(x_0)}_{\tau_s} = x_0 \in E$ (см. [5]). Пусть теперь $\tau_s = +\infty$. Тогда для любого процесса X, часть которого в K_n совпадает с $X^{(K_n)}$, имеем:

$$P(t, x, E) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x\{X_t \in E;\ X_s \in K_n \text{ при } 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

---

* Мы предполагаем здесь и дальше, что система $\{K_n\}$ такова, что $K \subset K_n$, начиная с некоторого n, каков бы ни был компакт K.

** Здесь и в дальнейшем единственность понимается с точностью до эквивалентности [3].

Так как предел в правой части этого равенства одинаков для любого процесса, часть которого в K_n совпадает с $X^{(K_n)}$, то процесс X единственен.

Систему компактов $\{K_n\}$ назовем регулярной в E, если $K_n \nearrow E$ и каждая точка границы Γ_n области K_n регулярна в смысле [21].

Заметим, что задание частей процесса X в K_n однозначно определяет оператор $\mathfrak{A}$. Сформулируем условие регулярности процесса X в терминах свойств этого оператора.

Лемма 4.1. *Пусть X — диффузионный процесс, необрывающийся внутри E (т. е. $\tau_K < \zeta$ для любого компакта $K \subset E$), а $\{K_n\}$ — регулярная система компактов. Для регулярности процесса X необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$\mathfrak{A}u - u = 0 \qquad (16)$$

не имело в E положительного ограниченного решения.

Доказательство. 1. Пусть уравнение (16) имеет в E положительное решение $u_0(x)$, причем $u_0(x) \leqslant 1$. Обозначим τ_n — момент достижения границы Γ_n траекторией процесса. В [9] показано, что $\mathbf{M}e^{-\tau_n} = u_n(x)$ удовлетворяет уравнению (16), причем $u_n|_{\Gamma_n} = 1$. Легко проверить, что функция $u_n - u_0$ не может иметь отрицательного минимума внутри K_n. Поэтому всюду в K_n $(u_n \geqslant u_0)$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau_\sigma$ и что $\mathbf{M}_x e^{-\tau_\sigma} = \mathbf{M}_x [\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\tau_n}] = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. Откуда $\mathbf{M}_x e^{-\tau_\sigma} \geqslant u_0(x)$. Из последнего неравенства следует, что с положительной вероятностью $\tau_\sigma < +\infty$.

2. Пусть $\tau_\sigma < +\infty$ с положительной вероятностью.

При наших предположениях функция $u(x) = \mathbf{M}_x e^{-\tau_\sigma}$ непрерывна по x. Нетрудно показать непосредственным вычислением, что $u_0(x) \in D_{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}u_0(x) = u_0(x)$.

§ 5. Стабилизация решений параболических уравнений

Условия 1°—3° § 1 выполнены для процессов в области E N-мерного эвклидова пространства R_N, оператор $\mathfrak{A}$ для которых на дважды дифференцируемых функциях имеет вид:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial x}{\partial x_i}.$$

Мы предположим, что коэффициенты a_{ij} и b_i трижды дифференцируемы в E, а $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij} \lambda_i \lambda_j > 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \neq 0$.

Для того чтобы к решениям уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ можно было применять наши результаты, нужно доказать, что функция $\mathbf{M}_x f(X_t)$ при каких-то предположениях удовлетворяет этому уравнению,

Лемма 5.1. *Если процесс X регулярен в области E, а f — непрерывная,*

ограниченная функция на E, то $\mathbf{M}_x f(X_t)$ является единственным решением задачи Коши для уравнения $\frac{du}{dt} = Lu$ с начальной функцией $f(x)$ *.

Доказательство этой леммы разбивается на три этапа.

1. Единственность. Так как процесс X по предположению регулярен, то уравнение (16), а, значит, и уравнение

$$Lu - u = 0 \qquad (16')$$

не имеет в области E положительного ограниченного решения. Пусть $\{K_n\}$ регулярная система компактов. Обозначим $u_n(x)$ решение уравнения (16), принимающее на Γ_n значение 1. На основании вышеизложенного $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.

Для доказательства единственности решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \qquad (17)$$

достаточно показать, что функция $w(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (17), и такая, что $|w_{t=0} = 0,\ 0 \leqslant w|_{\Gamma_n} \leqslant \mathbf{M}$, равна нулю тождественно. Рассмотрим вспомогательную функцию $u_n(x)e^t - w(x,t)$. Очевидно, что $u_n(x)e^t -$

$-w(x,t)|_{\Gamma_n} \geqslant 0$ и $L[u_n(x)e^t - w(x,t)] - \frac{\partial}{\partial t}[u_n(x)e^t - w(x,t)] = 0$.

Поэтому в области $E \times [0,t]$ будем иметь $u_n(x)e^t \geqslant w(x,t)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $w(x,t) \equiv 0$

2. Докажем, что $\mathbf{M}_x f(X_t)$ удовлетворяет уравнению (17) для достаточно гладкой начальной функции $f(x)$. При этом мы будем опираться на следующий результат, принадлежащий К. Ито [14]. Если во всем R_N задан оператор Lu, коэффициенты которого удовлетворяют условию Липшица равномерно в R_N, а $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geqslant m\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i^2$ при $x \in E$, то существует единственный марковский процесс в R_N, в область определения инфинитезимального оператора A которого входят дважды дифференцируемые функции с равномерно ограниченными вторыми производными; для таких функций $Af = Lf$.

Пусть области K_n построены так же, как и раньше. Изменим коэффициенты оператора L вне K_n и продолжим их на все R_N так, чтобы удовлетворялись условия теоремы К. Ито. Тогда во всем R_N мы получим процесс $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, \infty, \mathbf{M}_t^{(n)}, \mathbf{P}_x^{(n)}\}$, часть которого в K_n совпадает с частью X в K_n**.

---

* При сделанных ограничениях на коэффициенты верно и обратное: из нерегулярности следует существование не менее двух решений уравнения $\frac{du}{dt} = Lu$ при любой ограниченной начальной функции. В самом деле, так как процесс X нерегулярен, то уравнение (16) имеет положительное ограниченное решение $u_0(x)$. Тогда функция $w(x,t) = (e^t - 1)u_0(x)$ является барьером, с помощью которого легко установить, что уравнение $\frac{du}{dt} = Lu$ имеет положительное решение такое, что $u(x,0) = 0$.

** Этот интуитивно очевидный факт следует из [16].

Пусть $f \in D_{A^{(n)}}$. Хорошо известно (см., например, [13]), что тогда функция $u_n(x) = \mathbf{M}_x^{(n)} f(X_t) \in D_{A^{(n)}}$, причем $A^{(n)} u^{(n)}(x) = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}$; $u^{(n)}(x, 0) = f(x)$.

Так как процесс X регулярен в E, то для любой точки $x \in E$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}_x^{(n)} f(X_t^{(n)}) = \mathbf{M}_x f(X_t)$. Для того чтобы доказать, что $\mathbf{M}_x f(X_t) \in D_L$ и $L\,\mathbf{M}_x f(X_t) = \frac{\partial \mathbf{M}_x f(X_t)}{\partial t}$, осталось использовать тот хорошо известный факт, что из последовательности ограниченных решений параболического уравнения при сделанных предположениях на коэффициенты можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к решению этого уравнения [17].

3. Пусть теперь $f(x)$ — любая непрерывная и ограниченная на E функция. Построим последовательность функций $f_n(x)$, каждая из которых дважды дифференцируема с равномерно ограниченной второй производной, так, чтобы $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Очевидно, что $\mathbf{M}_x f_n(X_t) \to \mathbf{M}_x f(X_t)$. Используя снова ту же теорему из дифференциальных уравнений, мы получим $L\,\mathbf{M}_x f(X_t) = \frac{\partial \mathbf{M}_x f(X_t)}{\partial t}$. То, что $\mathbf{M}_x f(x_t) \to f(x)$ при $t \downarrow 0$ следует из условия 1° § 1.

До сих пор мы ничего не говорили об условиях возвратности процесса X. Сформулируем теперь условие возвратности в терминах свойств оператора L^*. Пусть G — область с регулярной границей Γ такая, что $G \cup \Gamma \subset E$.

Лемма 5.2. *Для того чтобы процесс X был возвратен, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$Lu = 0$$

имело единственное ограниченное решение задачи Дирихле в области $E \setminus G$ с заданием непрерывных граничных данных на Γ.

Доказательство этой леммы можно провести аналогично доказательству леммы 4.1 (см. также [11]). Чтобы не усложнять формулировку леммы 5.3, мы предположим, что размерность пространства $N \geqslant 2$.

Лемма 5.3. *Если для какой-нибудь точки $x_0 \in E \setminus G$ и $\mathbf{M}_{x_0} \tau_G < +\infty$, то и для всех точек $x \in E \setminus G$ $\mathbf{M}_x \tau_G < +\infty$. При этом функция $\mathbf{M}_x \tau_G$ непрерывна и $L\,\mathbf{M}_x \tau_G = -1$.*

Отметим, что непрерывность $\mathbf{M}_x \tau_G$ нельзя доказать, опираясь только на свойство 2°, так как функция $\mathbf{M}_x \tau_G$ не является в общем случае равномерно ограниченной в $E \setminus G$.

Доказательство леммы. Так как $\mathbf{M}_{x_0} \tau_G < +\infty$, то процесс X возвратен**. Пусть K_n — регулярная система компактов, Γ_n — граница K_n и

---

* Оператор L можно заменить оператором $\mathfrak{A}$ и рассматривать общий диффузионный процесс.

** В самом деле, $\pi_G(x)$ — вероятность достижения области G, исходя из x, удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ [21]. Из того, что $\mathbf{M}_{x_0} \tau_G < +\infty$ следует, что $\pi_G(x_0) = 1$; это значит, что во внутренней точке области $E \setminus G$ функция $\pi_G(x)$ достигает максимального значения. Применяя усиленный принцип максимума для уравнения $Lu = 0$ получим, что $\pi_G(x) \equiv 1$, при $x \in E \setminus G$. Заметим, что это рассуждение не проходит в одномерном случае из-за несвязности $E \setminus G$.

пусть τ_n — момент достижения $\Gamma_n \cup \Gamma (x \in K_n \setminus G)$. Так как процесс X возвратен, то для почти всех $\omega\, \tau_n \nearrow \tau_G$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{M}_x\, \tau_n = \mathbf{M}_x \tau_G$. В [21] показано, что $L\, \mathbf{M}_x \tau_n = -1$. Пусть K — произвольный компакт. Выберем n_0 так, чтобы $K_{n_0} \supset K$. Имеем

$$\mathbf{M}_x \tau_G = \mathbf{M}_x \tau_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{\infty} [\mathbf{M}_x \tau_{i+1} - \mathbf{M}_x \tau_i]. \tag{18}$$

Все члены ряда (18), кроме первого, — положительные функции, для которых $Lu = 0$; ряд сходится в точке x_0, поэтому ряд сходится равномерно в K. (Вторая теорема Гарнака при наших предположениях может легко быть выведена из результатов Сэррина [15]). Ясно также, что $L\mathbf{M}_x \tau_G = -1$. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Для того чтобы у процесса X существовала конечная инвариантная мера, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$Lu = -1$$

имело положительное решение в области $E \setminus G$.

Эта лемма базируется на следующих утверждениях:

1. Для существования конечной инвариантной меры необходимо и достаточно, чтобы для $x \in E \setminus G\ \mathbf{M}_x \tau_G < +\infty$ (см. теорему 3.3 и лемму 5.3).

2. Если $\mathbf{M}_x \tau_G < +\infty$, то $L\, \mathbf{M}_x \tau = -1$ (см. лемму 5.3).

3. Если уравнение $Lu = -1$ имеет в $E \setminus G$ положительное решение u_0, то $\mathbf{M}_x \tau_G < +\infty$.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в силу принципа максимума при всех n $\mathbf{M}_x \tau_n < u_0(x)$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$ и используя (18), получим наше утверждение.

Марковский процесс X в области E назовем, следуя [4], *положительным, если $\mathbf{M}_x \tau_G < +\infty$ для любого непустого открытого множества $G \subset E$ и любого $x \in E \setminus G$.*

Связь возвратности и положительности марковского процесса с существованием инвариантной меры и эргодическими свойствами впервые была выявлена А. Н. Колмогоровым в [4] для процессов со счетным числом состояний и дискретным временем. Как уже упоминалось выше, для одномерных процессов диффузионного типа соответствующие теоремы доказаны в [1—2].

Рассмотрения этого и предыдущего параграфов позволяют дать условия различного поведения решений задачи Коши для уравнения [17] при $t \to +\infty$.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены условия на коэффициенты оператора L, сформулированные в начале § 5. Предположим также, что уравнение* (16) *не имеет в области E положительного ограниченного решения. Тогда*:

А. *Существует единственное решение задачи Коши для уравнения* (17) *с любой непрерывной и ограниченной начальной функцией $f(x)$.*

Б. *Если при этом уравнение $Lu = 0$ имеет единственное решение задачи Дирихле в области $E \setminus G$ с заданием граничных значений на границе Γ области G (G — ограниченная область) и уравнение $Lu = -1$ имеет положительное в $E \setminus G$ решение, то для любой ограниченной начальной функции $f(x)$*

ешение $u(x,t)$ задачи Коши уравнения (17) *удовлетворяет соотношению:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \int_E f(x)\,\mu(dx)$$

$\mu(A)$ — нормированная инвариантная мера марковского процесса).

B. *Если уравнение $Lu = 0$ имеет единственное решение задачи Дирихле в $E\setminus G$ с заданием граничных значений на Γ, а уравнение $Lu = -1$ не имеет положительного в $E\setminus G$ решения, то для финитной начальной функции $f(x)$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt = 0,$$

но

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T u(x,t)\,dt = +\infty, \text{ если } f(x)\geqslant 0 \text{ и } f(x)\not\equiv 0.$$

Г. *Если уравнение $Lu = 0$ имеет не менее двух ограниченных решений задачи Дирихле в области $E\setminus G$ с заданием граничных данных на Γ, то для финитной начальной функции $f(x)$ выполняются соотношения*

$$\int_0^\infty u(x,t)\,dt < +\infty, \text{ если } f\geqslant 0;$$

$$u(x,t)\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Утверждение А теоремы следует из лемм 4.1 и 5.1 (оно, впрочем легко доказывается и без привлечения средств теории вероятностей). Утверждение Б следует из леммы 5.1 теоремы 3.4 и следствия леммы 5.3. Утверждение В сразу вытекает из леммы 5.1, следствия теоремы 3.1, леммы 5.2 и следствия леммы 5.3.

Остановимся несколько подробнее на утверждении Г. Из леммы 5.2 следует, что процесс X в этом случае невозвратен. Далее, применяя лемму 3.1, убеждаемся, что $\int_0^\infty T_t|f(x)|\,dt < \infty$ и $T_t f(x)\to 0$, если f финитна. Применение леммы 5.1 приводит нас к утверждению Г.

Замечание 1. Пусть $\mu(x)$ и $p(t,y,x)$ плотность инвариантной меры и переходной вероятности процесса X по эвклидовой мере dx. Из (1) ясно, что

$$\mu(x) = \int \mu(y)\,p(t,y,x)\,dy. \tag{19}$$

Предположим, что выполнены условия, при которых в правой части (19) возможно двукратное дифференцирование по x и дифференцирование по t под знаком интеграла и $p(t,y,x)$, рассматриваемая как функция от x и t, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p$. Тогда получим: $L^*\mu = 0$.

Иногда удобно бывает искать $\mu(x)$, как решение этого уравнения.

Замечание 2. Результат пункта В теоремы 5.1 можно, по-видимому, усилить, заменив утверждение: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\,dt = 0$ на $\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0$. Однако мы в состоянии в настоящее время доказать это усиление лишь для

одномерного случая. (При доказательстве мы пользуемся тем же методом, каким А. Н. Колмогоров в [4] доказал аналогичный факт для процессов со счетным числом возможных состояний и дискретным временем.)

Замечание 3. Условия различного поведения решений задачи Коши для уравнения (17) сформулированы в теореме 5.1 в терминах свойств оператора L. Ранее они были сформулированы в терминах поведения траекторий соответствующего марковского процесса. Из найденных нами условий можно получить достаточные условия для каждого из случаев А, Б, В, Г уже в терминах коэффициентов оператора L (см. приложение). В одномерном случае эти условия становятся также и необходимыми.

Замечание 4. А. М. Ильин обратил внимание автора на задачу о предельном поведении при $t \to +\infty$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - c(x)\,u, \qquad (20)$$

где $c(x) \geqslant 0$. Как известно, оператору $Lu - c(x)\,u$ соответствует обрывающийся марковский процесс $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t, \zeta, \widetilde{M}_t, \widetilde{\mathbf{P}}_x, \theta_t)$, являющийся подпроцессом процесса X. Нетрудно показать, что если процесс X возвратен, а функция $c(x)$ непрерывна и неравна тождественно нулю, то $\mathbf{P}_x\{\zeta > T\} \to 0$ при $T \to \infty$. Это означает, что

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \qquad (21)$$

для любой ограниченной начальной функции $f(x)$. Если же процесс X — невозвратен, но регулярен, $c(x)$ — финитна, а начальная функция $f(x) \geqslant a > 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) > 0$.

Достаточные условия возвратности, невозвратности и регулярности процесса X, указанные в приложении, позволяют дать достаточные условия различного поведения решений задачи Коши для уравнения (20) в терминах коэффициентов уравнения.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Е. Б. Дынкину за большую помощь при редактировании работы и А. М. Ильину за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Предположим, что оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

задан во всем эвклидовом пространстве R^N, причем коэффициенты a_{ij} и b_i достаточно гладки * и $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0$ всюду в R^N, если $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \neq 0$. Мы сформулируем здесь некоторые достаточные, а также необходимые условия (в

* Достаточно, например, существования непрерывных третьих производных у всех коэффициентов.

терминах коэффициентов оператора L) того, чтобы соответствующий оператору L марковский процесс был регулярен, возвратен и положителен. В силу рассмотрений § 4 и 5 эта задача сводится к отысканию достаточных условий того или иного поведения решений уравнений $Lu - u = 0$; $Lu = 0$; $Lu = -1$. Приведенные ниже достаточные условия могут быть установлены методом барьеров подобно тому, как аналогичные факты доказаны в [21].

Введем обозначения: $r(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\overline{A}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \max_{\{x: r(x)=\rho\}} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j;$$

$$\overline{C}(\rho) = \rho \max_{\{x: r(x)=\rho\}} \frac{\sum_{i=1}^{N} (a_{ii}(x) + b_i(x) x_i)}{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) x_i x_j} - \frac{1}{\rho};$$

$$\underline{W}(\rho) \exp\left\{ -\int_{r_0}^{\rho} \overline{C}(s)\, ds \right\}; \quad \underline{Z}(\rho) = \underline{W}(\rho) \int_{r_0}^{\rho} |\underline{W}(z)\, \overline{A}(z)|^{-1} dz.$$

Аналогично $\underline{W}(\rho)$ и $\underline{Z}(\rho)$ с заменой всех максимумов на минимумы и наоборот, определяются функции $\overline{Z}(\rho)$ и $\overline{W}(\rho)$.

Теорема I. *Для регулярности процесса X достаточно, чтобы* $\int_{r_0}^{\infty} \underline{Z}(\rho) d\rho = +\infty$ $(r_0 > 0)$; *если же* $\int_{r_0}^{\infty} \overline{Z}(\rho)\, d\rho < +\infty$ *для некоторого* $r_0 > 0$, *то процесс X нерегулярен, причем для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ $\underline{\mathbf{P}}_x \{ \tau_\sigma < \varepsilon \} > 1 - \delta$ *при* $r(x) > R(\varepsilon, \delta)$.

Сделаем несколько замечаний по поводу теоремы I.

1°. Условия теоремы I претерпят очевидные видоизменения, если рассматривать оператор L не во всем пространстве R^N, а в сфере $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 < R^2$. Теорема I дает в этом случае достаточные условия достижимости или недостижимости границы сферы траекторией марковского процесса. В одномерном случае эти условия смыкаются и мы получаем известные необходимые и достаточные условия достижимости границы [8]. Теорема I дает необходимые и достаточные условия достижимости также и в сферически симметричном случае.

2°. Теоремы I можно обобщить на случай, когда коэффициенты a_{ij} и b_i зависят и от времени. В этом случае при определении функций $\overline{A}(\rho)$, $\overline{C}(\rho)$, $\underline{A}(\rho)$, $\underline{C}(\rho)$ нужно брать максимумы и минимумы также и по t в соответствующем интервале. Для одномерного случая в таком обобщенном виде теорема I сформулирована в [18].

3°. Второе условие теоремы 2 обеспечивает «равномерно быстрый» уход в бесконечность траектории X_t процесса X. В то же время для нерегулярности процесса X достаточно, чтобы уход в бесконечность за конечное время был возможен хотя бы в одном направлении, например, в положительном направлении оси x_i; легко доказать, что для этого достаточно выполнения следующего условия:

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \underline{B}_i(y)\,dy\right\}\left[\int_{x_0}^{x} \exp\left\{\int_{x_0}^{y} \underline{B}_i(z)\,dz\right\} \underline{A}_i^{-1}(y)\,dy\right] dx < +\infty, \quad \text{(I)}$$

при некотором x_0. Здесь $\underline{A}_i(x_i) = \inf a_{ii}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$;

$\underline{B}_i(x_i) = \inf \dfrac{b_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{a_{ii}(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$, где нижняя грань берется по всем координатам, кроме j-той. Ясно, что для нерегулярности процесса достаточно выполнения условия (I) хотя бы при одном i.

Теорема II. *Для того чтобы процесс X был возвратен, достаточно, чтобы* $\int_{r}^{\infty} \underline{W}(s)\,ds = +\infty$; *если же* $\int_{r_0}^{\infty} \overline{W}(s)\,ds < +\infty$, *то процесс X невозвратен*.*

Замечание. Второе условие теоремы II обеспечивает равномерную в некотором смысле невозвратность процесса X по всем направлениям. Мы дадим теперь другое условие невозвратности, аналогичное (I), оказывающееся иногда более удобным.

Для невозвратности достаточно, чтобы для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ выполнялось одно из двух неравенств

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \underline{B}_i(y)\,dy\right\} dx < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{x_0} \exp\left\{\int_{x}^{x_0} \overline{B}_i(y)\,dy\right\} dx < +\infty,$$

где $\underline{B}_i(y)$ определено как в (I), а $\overline{B}_i(y)$ определяется аналогично с заменой нижней грани на верхнюю.

Теорема III. *Процесс X положителен, если*

$$\int_{r_0}^{\infty} [\underline{W}(s)\,\underline{A}(s)]^{-1}\,ds < +\infty \quad \textit{и} \quad \int_{r_0}^{\infty} \underline{W}(s)\,ds = +\infty, \quad \textit{если же} \quad \int_{r_0}^{\infty} [\overline{W}(s)\,\overline{A}(s)]^{-1}\,ds = +\infty,$$

то процесс не является положительным.

Рассмотрим 2 примера.

1°. Пусть $Lu = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

* Некоторое достаточное условие невозвратности процесса дано в [11].

Обозначим $b_x = \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{x_i}{r(x)}$; тогда

$$\overline{A}(\rho) = \underline{A}(\rho) = 1; \quad \overline{C}(\rho) = \frac{N-1}{\rho} + \max_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x;$$

$$\underline{C}(\rho) = \frac{N-1}{\rho} + \min_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x.$$

Из теорем I — III получим (предполагается, что все приводимые ниже неравенства справедливы, начиная с достаточно большого значения ρ, а K и ε — некоторые положительные постоянные):

Процесс X регулярен, если $\max_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \leqslant K\rho \ln \rho$ и нерегулярен, если $\min_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \geqslant K\rho (\ln \rho)^{1+\varepsilon}$.

Процесс X возвратен, если $\max_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \leqslant \frac{2-N}{\rho}$ и невозвратен, если

$$\min_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \geqslant \frac{2-N-\varepsilon}{\rho}.$$

Процесс X положителен, если $\max_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \leqslant -\frac{N+\varepsilon}{\rho}$ и не является положительным, если $\min_{\{x: r(x)=\rho\}} b_x \geqslant -\frac{N}{\rho}$.

2° Из примера 1° следует, что процесс, связанный с оператором $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, возвратен, если $N \leqslant 2$, и невозвратен, если $N > 2$. Оказывается, что процесс, связанный с оператором L, в известном смысле близком к Δ при больших значениях ρ, также возвратен при $N = 2$. Точнее, из теоремы II следует, что процесс возвратен, если оператор

$$L = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

таков, что при $\rho \geqslant \rho_0$

$$\max_{\{x: r(x)=\rho\}} \frac{a_{11} x_2^2 - 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_1^2}{a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln \rho}.$$

Поступила в редакцию
6.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Maruyama, Tanaka, Some properties of one-dimensional diffusion processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A-11, 2 (1957), 117—141.

[2] Watanabe, Motoo, Ergodic property of recurrent diffusion processes, Journ. of the Math. Soc. of Japan, **10**, 3 (1958), 272—286.

[3] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, М., 1959.

[4] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, Бюллетень МГУ(А); 1; 3 (1937), 1—16.

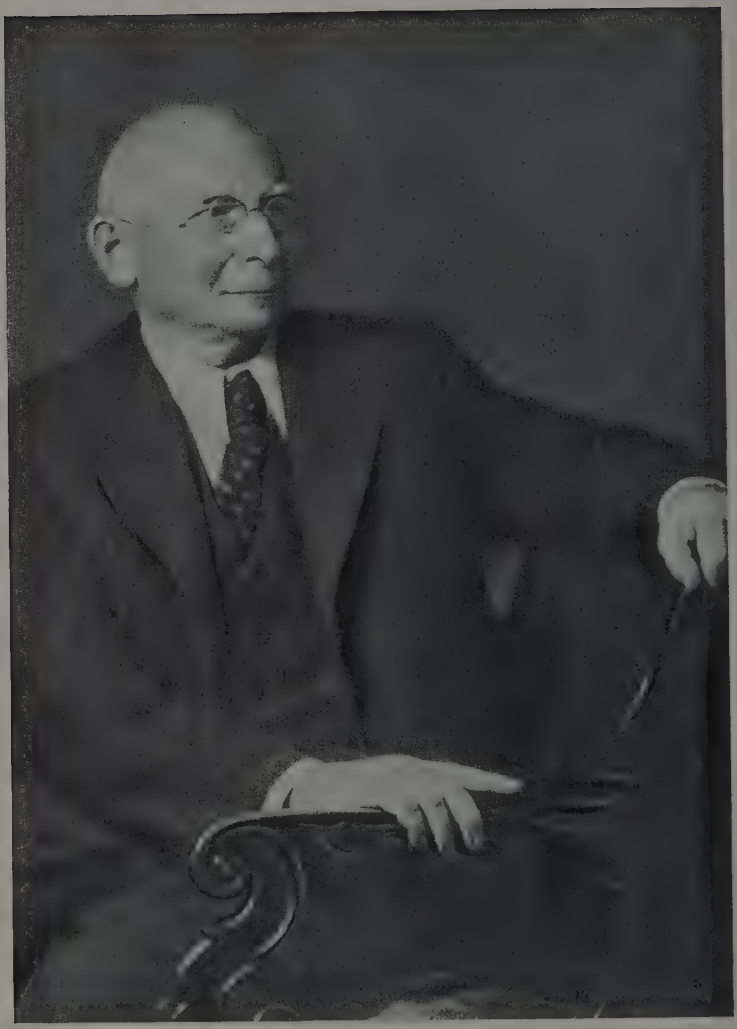
[5] W. Feller, Diffusion processes in one dimension, Trans. of Amer. Math. Soc., **77**, 1 (1954), 1—31.
[6] T. E. Harris, The existence of stationary measures for certain Markov processes, Proceed. Third Berkeley Symp., 2 (1956), 113—124.
[7] М. В. Бебутов, Markoff chains with a compact state space, Матем. сб., **10**(52); 3 (1942), 213—238.
[8] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semigroup of transformations, Anals of Math., **55**, 3 (1952), 467.
[9] Р. З. Хасьминский, О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}u+Vu=0$, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 332—341.
[10] Д. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
[11] G. A. Hunt, On positive Green's functions, Proceed. of the Nat. Acad. Sci. USA, **40**, 9 (1954), 816—818.
[12] J. L. Doob, Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, Trans. of the Amer. Math. Soc., **63**, 3 (1948), 393—421.
[13] Е. Б. Дынкин, Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 38—59.
[14] K. Ito, Stochastic differential equations in a differentiable manifold, Nagoja Math. Journ., 1 (1950), 35—47.
[15] J. Serrin, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, Journ. d'Analyse Math., **4**, 2 (1955—56), 292—306.
[16] J. L. Doob, Martingales and one-dimensional diffusion, Trans. of Amer. Math. Soc., **78**, 1 (1955), 168—208.
[17] С. Н. Бернштейн, Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, ДАН СССР, **18**, 7 (1938), 385—388.
[18] Р. З. Хасьминский, Вероятностный подход к краевым задачам для эллиптических и параболических уравнений, Теория вероят. и ее примен., **II**, 4 (1957), 482—483.
[19] И. В. Гирсанов, Сильно феллеровские процессы, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 7—28.
[20] Р. Л. Добрушин, Об условиях регулярности однородных по времени марковских процессов со счетным числом возможных состояний, УМН, **7**, 6 (1952), 185.
[21] Р. З. Хасьминский, Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области, Теория вероят. и примен. **III**, 4 (1958), 430—451.
[22] А. М. Ильин, О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени (будет опубликована в журнале Успехи математ. наук в 1960 году).

ERGODIC PROPERTIES OF RECURRENT DIFFUSION PROCESSES AND STABILIZATION OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS

R. Z. HASMINSKY (*MOSCOW*)

(*Summary*)

In this paper the existence of a unique invariant measure for Markov processes satisfying the conditions 1 — 9 is proved. This result is applied for obtaining the asymptotic properties of the solution to the Cauchy problem for the parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ when $t \to +\infty$. It is established that these properties depend on properties of the solution the external Dirichlet problem for the equations $Lu = 0$ and $Lu = -1$. The sufficient conditions for them expressed in terms of the behavior of the coefficients in the equation $Lu = \frac{\partial u}{\partial t}$ are given in the appendix.



СЕРГЕЙ НАТАНОВИЧ БЕРНШТЕЙН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том V 1960 Выпуск 2

А. Н. КОЛМОГОРОВ и О. В. САРМАНОВ

О РАБОТАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

6 марта этого года исполнилось 80 лет со дня рождения Сергея Натановича Бернштейна, одного из крупнейших математиков нашего времени.

1. К проблемам теории вероятностей Сергей Натанович впервые обратился в 1911—12 году. В этих первых работах по теории вероятностей преобладают интересы чистого аналитика. Замечательные по точности оценки, данные в работе [1], были самим Сергеем Натановичем усовершенствованы в 1943 г. [44] и позднее далее уточнялись Феллером. В работе [3] дается применение вероятностных методов к доказательству теоремы Вейерштрасса, относящейся к чистому анализу, вошедшее во многие учебники.

2. Несколько позднее внимание Сергея Натановича привлекло то обстоятельство, что логические основы теории вероятностей в то время оставались еще недостаточно выясненными. В статье [4] «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей», опубликованной в 1917 г., высказано требование, что теория вероятностей, подобно геометрии, должна получить аксиоматическое обоснование, а объекты ее исследования должны получить строгое математическое определение.

Таким основным объектом в аксиоматике С. Н. Бернштейна является случайное событие, вероятность же является производным понятием. В первую очередь строится система абстрактных объектов (случайных событий) и определяются соотношения равнозначности, включения и алгебраические действия над событиями (объединение и совмещение), при этом достоверное и невозможное события получают следующее внутреннее определение.

Событие Ω, входящее в рассматриваемую систему событий, называется достоверным, если его объединение с любым событием A рассматриваемой системы равнозначно событию Ω.

Событие O называется невозможным, если его объединение с любым событием A системы равнозначно событию A. При этом предполагается еще, что достоверное событие не может быть равнозначно невозможному событию.

Простейшей системой событий является система, состоящая из конечного числа несовместимых событий A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$), объединение которых есть достоверное событие, достоверного и невозможного событий. По соображениям, лежащим вне теории вероятностей (симметрия), в

ряде случаев события A_i можно считать равновероятными, т. е. сопоставить им одинаковые положительные числа.

Если теперь B есть объединение m таких событий A_i, то вероятность B есть монотонно возрастающая функция $f\left(\frac{m}{n}\right)$ дроби $\frac{m}{n}$, не обязательно аддитивная. Соглашение о том, что $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$ является совершенно произвольным и продиктовано лишь соображениями простоты, с таким же успехом, в качестве вероятности B, можно было бы рассмотреть функцию $\frac{m}{n-m}$ или $\lg\frac{m}{n}$ и т. д.

Более сложные системы событий, приводящие к иррациональным вероятностям, определяются конструктивно и связаны с предельным переходом при $n \to \infty$.

В последних изданиях курса теории вероятностей (см. работы [31] и [48]) имеется краткое изложение указанной аксиоматики.

Мы видим, что в этой аксиоматике исходным допущением является возможность сравнивать события по их большей, равной, или меньшей вероятности, числовая же мера вероятности является производной. Такой подход к делу в новейшее время разрабатывался американским математиком Купманом.

3. Начиная с 1921 г. появляется ряд работ Сергея Натановича, посвященных различным специальным вопросам применений теории вероятностей [6, 8, 9, 11, 12, 14, 25, 29, 32], а в 1927 г. выходит первым изданием фундаментальный курс «Теория вероятностей», который с большими дополнениями переиздается в 1934 и в 1946 гг. На математических съездах в Москве (1927) и Цюрихе (1932) Сергей Натанович выступает с большими обзорными докладами о проблемах теории вероятностей. Мы будем говорить еще далее об основных теоретических результатах, полученных Сергеем Натановичем в этот период, а сейчас подчеркнем, что для этого времени столь широкая постановка работ по всем основным теоретическим и прикладным вопросам теории вероятностей была еще делом совершенно новым. В некоторой мере с ней может сравниться лишь деятельность Мизеса и его сотрудников в Берлине, развивавшаяся в те годы. Естественно, что теоретические и прикладные работы Сергея Натановича и его курс теории вероятностей в значительной мере определили все развитие исследований по теории вероятностей в СССР.

4. Целый ряд работ Сергея Натановича связан с уточнением неравенства Чебышева ([5], [10], [34]) и вычислением погрешности формулы Лапласа ([1], [10], [44]), а также посвящен центральной предельной теореме теории вероятностей в условиях, обобщающих условия Ляпунова.

Причем в работе [7] 1922 г. центральная предельная теорема доказана при столь общих условиях, что ее частный случай, предполагающий существование вторых моментов, эквивалентен теореме Линдеберга, опубликованной в том же году *. Таким образом известная работа Феллера 1936 г. ** показывает необходимость условий теоремы Бернштейна (для величин, имеющи-

* J. W. Lindeberg, Mathem. Zeitschr., Bd., 15, 1922.

** W. Feller, Mathem. Zeitschr., Bd. 40, 1936.

вторые моменты, предельно пренебрегаемых и имеющих нуль своей медианой).

Изложение указанных вопросов на русском языке можно найти в 4-ом издании курса теории вероятностей (работа [48], добавл. 1).

В этой же книге помещено первое доказательство двумерной предельной теоремы, лежащей в основе широкого применения нормальной корреляции.

5. В работе [17] (русский перевод [45]) исследованы условия применимости центральной предельной теоремы к слабо зависимым случайным величинам и цепям Маркова.

Общая теория слабо зависимых величин, разработанная Сергеем Натановичем, позволила ему распространить центральную предельную теорему на серии случайных величин, связанных в сингулярную цепь Маркова с вероятностями перехода, неограниченно убывающими по мере роста n-числа случайных величин, входящих в рассматриваемую серию. При этом была исследована допустимая скорость убывания, в частности было показано, что предельная теорема может перестать быть приложимой, если вероятности перехода убывают, как $n^{-1/3}$.

Эти фундаментальные и весьма тонкие результаты ныне стали классическими и послужили отправным пунктом целого ряда работ других математиков.

Позже, в работах [39] и [41], Сергей Натанович, развивая общую теорию почти независимых величин, впервые рассмотрел последовательность зависимых величин, частные суммы которых образуют дискретный мартингал * и доказал применимость центральной предельной теоремы к таким величинам.

6. Другой цикл работ Сергея Натановича ([25], [30], [35]) посвящен обоснованию методом уравнений в конечных разностях теории непрерывных стохастических процессов. В работах этого цикла проводится конструктивное построение случайной величины, получающей независимые приращения за малые промежутки времени и такой, что в пределе, когда длины промежутков убывают, а число их стремится к бесконечности, у нее существует предельный закон распределения $P(y, t)$, который удовлетворяет известному уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -A\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(B\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}. \qquad (I)$$

Наиболее полное изложение этих работ помещено в добавлении 6 4-го издания курса теории вероятностей (работа [48]), где отмечено, в частности, что предложенный метод доказательства существования предельного распределения содержит эффективный способ последовательных приближений для нахождения решения уравнения параболического типа (I) при $B(y, t) \geqslant 0$ и заданном начальном распределении вероятностей $P(y, 0)$.

Другой важной особенностью метода Сергея Натановича является нахождение достаточных условий, накладываемых на коэффициенты уравнения (I) и гарантирующих существование решения, имеющего вероятностный смысл.

Наибольший интерес представляет ограничение

$$\frac{yA(y, t)}{y^2+1} < C \qquad (A)$$

* См. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ., 1956 г., стр. 88.

$(0 \leqslant t < T$, C не зависит от $y)$, обеспечивающее соблюдение так называемого принципа конечности. В этой же книге приведен пример, показывающий, что когда условие (А) нарушено, принцип конечности тоже может быть нарушен.

В более новой терминологии здесь дело идет об условиях, когда $y = -\infty$ и $y = +\infty$ являются «недостижимыми границами».

Сам Сергей Натанович в описанных работах не связывал с уравнением (I) представления о предельном случайном процессе с непрерывным временем. Параллельно с его исследованиями происходила, как хорошо известно, разработка прямой теории таких процессов. С точки зрения этой теории работы Сергея Натановича интерпретируются как посвященные предельным теоремам о переходе процессов с дискретным временем в процессы с непрерывным временем и следует отметить, что проблематика такого рода занимает все больше места в современной вероятностной литературе в СССР и за границей.

7. В статье [42] критикуется теория «доверительных вероятностей» Фишера. Здесь Сергей Натанович предостерегает от неправильного толкования уровня значимости $1 - \alpha$ как *апостериорной* вероятности покрытия доверительным интервалом неизвестного истинного значения параметра. На остроумном примере показывается, что иногда кажущееся естественным такое толкование числа $1 - \alpha$ приводит к грубо ошибочным результатам. Эта критика не затрагивает, впрочем, принятого в современных учебниках математической статистики понимания смысла и практических способов употребления «доверительных интервалов» *.

---

* Для большей отчетливости рассмотрим пример построения доверительного интервала для неизвестной средней a по малой выборке объема n из нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2.

Зададимся «уровнем значимости» α и найдем u_α из условия $2\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ $\left(\text{где } \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)$, тогда *априорная* вероятность эмпирической средней $\bar{x}$ попасть в интервал

$$a - \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < a + \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1$$

равна $1 - \alpha$, каково бы ни было неизвестное среднее a.

Переписав (1) в другом виде (эквивалентном исходному)

$$\bar{x} - \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2$$

будем границы неравенства (2) называть границами доверительного интервала, а число $1 - \alpha$ доверительной вероятностью, соответствующей этому интервалу. Введя новые термины, мы не изменили существа дела и поэтому не совершили никакой ошибки.

Неправильно *апостериорное* истолкование числа $1 - \alpha$ как вероятности покрытия интервалом $\left(\bar{x} - \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{u_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right)$ неизвестной средней a, после того, как наблюдения произведены, $\bar{x}$ стало известно и границы неравенства (2) перестали быть случайными.

С помощью теоремы Байеса можно доказать (и это проделано в разбираемой статье), что $1 - \alpha$ есть математическое ожидание апостериорной вероятности неравенства (2), т. е. некая средняя вероятность такого неравенства при различных $\bar{x}$; что замена величины ее средним значением может при малом числе наблюдений привести к грубым ошибкам и лишь в предположении, что n достаточно велико, по закону больших чисел отклонения апостериорных вероятностей от своего математического ожидания будет невелико.

Таким образом, как и следовало ожидать, при оценке неизвестной средней a по одному или по малому числу наблюдений исключить указываемую теоремой Байеса роль «априорной» информации о значении a, вообще говоря, нельзя.

8. Следует заметить, что ряд небольших по объему статей Сергея Натановича, на которых мы совсем не остановились в этом кратком обзоре, послужили основой целого ряда исследований других математиков. Примером может служить статья [43], содержащая доказательство следующей теоремы: «Пусть x и y будут две независимые случайные величины, имеющие равные дисперсии. Для того чтобы величины $x+y$ и $x-y$ также были между собой независимы необходимо и достаточно, чтобы каждая из величин x, y подчинялась закону Гаусса». Эта статья (объемом менее двух страниц) послужила основой целой серии работ разных авторов о независимых линейных формах, построенных на случайных слагаемых.

9. В целом, работы Сергея Натановича Бернштейна завершают классическое направление русской школы теории вероятностей, созданной П. Л. Чебышевым, А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым, и прокладывают новые пути в развитии этой важной отрасли математики.

Развитие теоретико-вероятностных идей Сергея Натановича можно найти в работах его ленинградских учеников (Г. А. Амбарцумян, В. П. Савкевич, О. В. Сарманов, Н. А. Сапогов), а также в работах А. Н. Колмогорова, Ю. В. Линника, Ю. В. Прохорова, Б. В. Гнеденко, В. П. Скитовича, Р. Л. Добрушина, А. В. Скорохода, И. И. Гихмана, В. В. Петрова и др.

СПИСОК РАБОТ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

(Во вторых скобках указан номер работы в «Списке трудов академика С. Н. Бернштейна», помещенном в конце I тома Собрания сочинений, Изд. АН СССР, 1952 г).

1911

[1] [32] Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, серия 2, т. 12, стр. 106—110.

[2] [34] Теория вероятностей, Харьков, 254 стр., литограф.

1912

[3] [42] Démonstration du théorème de Weierstrasse fondée sur le calcul des probabilités, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, серия 2, т. 13, стр. 1—2.

1917

[4] [83] Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, серия 2, т. 15, стр. 209—274.

1918

[5] [84] О законе больших чисел, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, серия 2, т. 16, стр. 82—87.

1921

[6] [86] О взаимоотношении между балловой оценкой и фактическим весом урожая по Харьковской губернии за 1913—1918 гг., Статистический бюл. ЦСУ Украины, № 4, стр. 2—5.

1922

[7] [88] Sur le théorème limite du calcul des probabilités., Math. Ann., Bd. 85, стр. 237—241.

1923

[8] [95] Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel, Comptes rendus, Paris, t. 177, стр. 528—531.

[9] [96] Principe de stationarité et généralisations de la loi de Menden, Comptes rendus, Paris, t. 177, стр. 581—584.

1924

[10] [98] Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа, Уч. зап. н.-и., кафедр Украины, Отд. матем., вып. 1, стр. 38—49.

[11] [99] Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности, Уч. зап. н.-и. кафедр Украины, Отд. матем, вып. 1, стр. 83—115.

[12] [103] Введение к кн.: Теоретические основания выборочного метода. Выдержки из 4-го англ. изд., Elements of statistics, A. Bowley, под ред. С. Н. Бернштейна (ЦСУ УССР), Харьков, стр. 5—9.

1925

[13] [104] Sur les courbes de distribution des probabilités, Math. Ztschr., Bd. 24, стр. 199—211.

[14] [104a] Об экономическом барометре Конъюнктурного института, Хозяйство Украины, апрель, № 4, стр. 12—22.

1926

[15] [107] Sur les sommes de quantités dépendantes, Изв. АН СССР, т. 20, стр. 1459—1478.

[16] [109] О применении одного геометрического принципа к теории корреляции, Сборник памяти Лобачевского, Казань, т. 2, стр. 137—150.

[17] [111] Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux some de quantités dependantes, Math. Ann., Bd. 97, стр. 1—59.

1927

[18] [119] Fondements géométriqus de la théorie des corrélations, Metron, t. 7, № 2, стр. 3—27.

[19] [120] Теория вероятностей, М.— Л., VIII+363 стр.

1928

[20] [121] Addition à l'article, «Sur les sommes de quantités dépendantes», Доклады АН СССР, сер. А, № 4, стр. 55—60.

[21] [122] Современное состояние теории вероятностей и ее приложений, Тр. Всеросс. съезда матем. в Москве 27 апр.— 4 мая 1927 г., М.— Л., стр. 50—63.

[22] [133] Поняття корелції між статистичними величинами, Вістн. статистики України, т. I, стр. 111—113.

1932

[23] [155] Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires, Verhandlungen math. Kongr., Zurich, т. I, стр. 288—309

[24] [162] Sur une propriété élémentaire du coefficient de corrélation, Зап. Харьк. матем. тов., т. 5, стр. 65—66.

1933

[25] [163] Sur l'équation differentielle de Fokker-Planck, Comptes rendus, Paris, t. 196, стр. 1062—1064.

[26] [165] О зависимостях между случайными величинами, Труды ноябрьск. юбил. сессии АН СССР, Л., стр. 38—62.

[27] [165a] Современное состояние теории вероятностей, М.— Л., ГТТИ (соединение №№ 21 и 26).

1934

[28] [166] О линейных квазинепрерывных цепях Маркова, I, Докл. АН СССР, т. I, стр. 1—9, То же, II (там же, стр. 361—365).

[29] [167] О рассеянии с поглощением, Докл. АН СССР, т. I, стр. 230—234.

[30] [169] Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques, I-re partie, Труды Физ.-мат. ин-та им. Стеклова, Отд. матем., т. 5, стр. 95—124.
[31] [171] Теория вероятностей, Изд. 2 и 3-е доп., М.— Л., 412 стр.

1935

[32] [175] О математическом ожидании простоя рабочих единиц при сложном производственном процессе, Уголь, № 117, Харьков, стр. 109—111.

1936

[33] [177] Détermination d'une limite inférieure de la dispersion des sommes de grandeurs liées en chaine singulière, Матем. сборник, т. 1 (43) : 1, стр. 29—37.

1937

[34] [184] О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева, Докл. АН СССР, т. 17, стр. 275—277.

1938

[35] [203] Équations differentielles stochastiques, Paris, Hermann, 31 p. Act. Sci. ind., стр. 738.

1939

[36] [205] Несколько замечаний по поводу предельной теоремы Ляпунова, Докл. АН СССР, т. 24, стр. 3—7.
[37] [206] Исправление одного доказательства, Докл. АН СССР, т. 25, стр. 705—707.
[38] [207] Петербургская школа теории вероятностей, Природа, № 8, стр. 17—22.

1940

[39] [211] Новые приложения почти независимых величин, Изв. АН СССР, серия матем., т. 4, стр. 137—150.
[40] [212] Задача об урне с добавляемыми шарами, Докл. АН СССР, т. 28, стр. 5—7.

1941

[41] [215] О суммах зависимых величин, имеющих взаимно почти нулевую регрессию, Докл. АН СССР, т. 32, стр. 303—307.
[42] [216] О «доверительных» вероятностях Фишера, Изв. АН СССР, серия матем., т. 5, стр. 85—94.
[43] [217] Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса, Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 3, стр. 21—22.

1943

[44] [223] Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, стр. 3—16.

1944

[45] [227] Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, т. X, стр. 65—114. (Перевод статьи № 17).

1945

[46] [230] О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей, Научное наследие П. Л. Чебышева, Изд. АН СССР, стр. 43—67.

1946

[47] [241] О предельной теореме теории вероятностей, Изв. НИИ мат. и мех. при Томском ун-те, стр. 174—189.
[48] [242] Теория вероятностей, М.— Л., изд. 4-е доп., 556 стр.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том V *1960* *Выпуск 2*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

А. Н. КОЛМОГОРОВ и Ю. А. РОЗАНОВ

Две σ-алгебры событий $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ независимы, если при любых $A' \in \mathfrak{M}'$ и $A'' \in \mathfrak{M}''$

$$\mathrm{P}(A',\ A'') = \mathrm{P}(A')\,\mathrm{P}(A'').$$

М. Розенблатом [1] была предложена естественная мера зависимости двух σ-алгебр событий:

$$\alpha(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'') = \sup_{A' \in \mathfrak{M},\ A'' \in \mathfrak{M}''} |\,\mathrm{P}(A' \cap A'') - \mathrm{P}(A')\,\mathrm{P}(A'')\,|.$$

Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$

$$\alpha(\mathfrak{M}_{-\infty}^{t},\ \mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty})$$

(где $\mathfrak{M}_s^t$ означает σ-алгебру событий, порожденную величинами $\xi(u)$), $s \leqslant u \leqslant t$ зависит только от τ и будет обозначаться $\alpha(\tau)$. Если $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то говорят, что процесс $\xi(t)$ обладает свойством *сильного перемешивания*. В настоящей заметке выясняется для случая гауссовских процессов, какие свойства спектральной функции $F(\lambda)$ процесса гарантируют наличие сильного перемешивания.

1. Для любых двух систем $\{\xi\} = \mathfrak{A}'$ и $\{\eta_l\} = \mathfrak{A}''$, имеющих конечные вторые моменты, введем показатель

$$\rho(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}'') = \sup_{\xi,\eta} \frac{|\,\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\,\xi)(\eta - \mathbf{M}\,\eta)}{[\mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\,\xi)^2\,\mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\,\eta)^2]^{1/2}}.$$

Если $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ являются, соответственно, совокупностями всех величин с конечными вторыми моментами, измеримых относительно σ-алгебр $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$, то по определению (см. [2])

$$\rho(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'') = \rho(\mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}'')$$

есть *максимальный коэффициент корреляции* между алгебрами $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$.

Легко видеть, что всегда

$$\alpha(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'') \leqslant \rho(\mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}''). \tag{1}$$

Пусть теперь $\{\xi\}$ и $\{\eta_l\}$ — две совокупности случайных величин, имеющих (для любого конечного набора $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_{l_1}, \ldots, \eta_{l_n}$) гауссовские совместные распределения, $\mathfrak{M}_\xi$ и $\mathfrak{M}_\eta$ есть σ-алгебры, порожденные, соответственно, событиями $(\xi \in \Gamma')$ и $(\eta \in \Gamma'')$, где Γ' и Γ'' — произвольные борелевские множества на прямой, H_ξ и H_{η_l} есть замкнутые линейные оболочки (в среднем квадратичном) совокупностей $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$.

Теорема 1 *. *Имеет место следующее равенство*

* Теорема 1 есть многомерное обобщение результата Сарманова [2], согласно которому равенство (2) выполняется для любых двух величин ξ и η, имеющих гауссовское совместное распределение.

$$\rho(\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta) = \rho(H_\xi, H_\eta). \tag{2}$$

Теорема 2. *Максимальный коэффициент корреляции удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\alpha(\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta) \leqslant \rho(\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta) \leqslant 2\pi\alpha(\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_\eta). \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда совокупности $\{\xi\}$ и $\{\eta\}$ состоят из конечного числа величин.

Далее, в пространствах H_ξ и H_η можно выбрать величины $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ таким образом, чтобы среди них были зависимы лишь величины ξ_k и η_k с одинаковыми индексами и каждая из величин $\xi \in \{\xi\}$, $\eta_i \in \{\eta_i\}$ была функцией от $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ соответственно; можно считать также, что $\mathbf{M}\xi_k = \mathbf{M}\eta_j = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = \mathbf{D}\eta_j = 1$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Далее, величины $f = f(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $g = g(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ можно представить в виде:

$$f = \sum_1^m f_k(\xi_1, \ldots, \xi_k), \qquad g = \sum_1^n g_j(\eta_1, \ldots, \eta_j),$$

где

$$f_k = \mathbf{M}(f \mid \xi_1, \ldots, \xi_k) - \mathbf{M}(f \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}).$$

$$g_j = \mathbf{M}(g \mid \eta_1, \ldots, \eta_j) - \mathbf{M}(g \mid \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}).$$

Заметим, что при $k \geqslant j$

$$\mathbf{M}[\mathbf{M}(f \mid \xi_1, \ldots, \xi_k) \mid \eta_1, \ldots, \eta_j] = \mathbf{M}[\mathbf{M}(f \mid \xi_1, \ldots, \xi_j) \mid \eta_1, \ldots, \eta_j]$$

и аналогично, при $j \geqslant k$

$$\mathbf{M}[\mathbf{M}(g \mid \eta_1, \ldots, \eta_j) \mid \xi_1, \ldots, \xi_k] = \mathbf{M}[\mathbf{M}(g \mid \eta_1, \ldots, \eta_k) \mid \xi_1, \ldots, \xi_k],$$

откуда следует, что $\mathbf{M} f_k g_j = 0$ при $k \neq j$ и, считая для определенности $m \leqslant n$,

$$\mathbf{M}fg = \sum_1^m \mathbf{M} f_k g_k = \sum_1^m \mathbf{M}[\mathbf{M}(f_k g_k \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1})].$$

Величины ξ_k и η_k, имеющие гауссовское распределение, не зависят от $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$, $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ и из цитированного уже результата Сарманова [2] выводим, что

$$|\mathbf{M}(f_k g_k \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1})| \leqslant \rho a_k b_k,$$

где

$$\rho = \rho(H_\xi, H_\eta), \quad a_k^2 = \mathbf{M}(f_k^2 \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}),$$

$$b_k^2 = \mathbf{M}(g_k^2 \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}).$$

Отсюда получаем, что

$$|\mathbf{M}fg| \leqslant \rho \sum_1^m \mathbf{M} a_k b_k \leqslant \rho,$$

что и доказывает нашу теорему.

Доказательство теоремы 2*. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $\xi_\varepsilon \in H_\xi$,

* Это простое доказательство было указано авторам Ю. В. Прохоровым.

$\eta_\varepsilon \in H_\eta$ с $\mathbf{M}\xi_\varepsilon = \mathbf{M}\eta_\varepsilon = 0$, $\mathbf{D}\xi_\varepsilon = \mathbf{D}\eta_\varepsilon = 1$ такие, что $r = \mathbf{M}\xi_\varepsilon\eta_\varepsilon > \rho - \varepsilon$. Рассмотрим события $A_\varepsilon = \{\xi_\varepsilon > 0\} \in \mathfrak{M}_\xi$ и $B_\varepsilon = \{\eta_\varepsilon > 0\} \in \mathfrak{M}_\eta$. Имеем (см. [9], стр. 321),

$$\mathrm{P}(A_\varepsilon B_\varepsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin r, \quad \mathrm{P}(A_\varepsilon)\,\mathrm{P}(B_\varepsilon) = \frac{1}{4}$$

и очевидно,

$$\frac{1}{2\pi}\arcsin r = \mathrm{P}(A_\varepsilon B_\varepsilon) - \mathrm{P}(A_\varepsilon)\,\mathrm{P}(B_\varepsilon) \leqslant \alpha.$$

Далее, если $\alpha > \frac{1}{4}$, то неравенство $\rho \leqslant 2\pi\alpha$ тривиально. Если же $\alpha \leqslant \frac{1}{4}$, то

$$\rho - \varepsilon \leqslant r \leqslant \sin 2\pi\alpha, \quad \rho \leqslant 2\pi\alpha + \varepsilon, \quad \rho \leqslant 2\pi\alpha,$$

что вместе с соотношениями (1) и (2) и доказывает нашу теорему.

Из теорем 1 и 2 вытекает, в частности, что *гауссовский стационарный процесс* $\xi(t)$ *обладает свойством сильного перемешивания тогда и только тогда, когда максимальный коэффициент корреляции* $\rho(\mathfrak{M}^{-}_{-\infty}, \mathfrak{M}^{\infty}_{t+\tau}) \to 0$ при $\tau \to \infty$ (в силу теоремы 1 он совпадает с показателем $\rho(\tau) = \rho(H^{+}_{-\infty}, H^{\infty}_{t+\tau})$, где $H^{t}_{-\infty}$ и $H^{\infty}_{t+\tau}$ есть линейные замыкания в среднем квадратичном величин $\xi(u)$, $u \leqslant t$ и $\xi(v)$, $v \geqslant t$, соответственно), более того (ср. [4], введение)

$$\alpha(\tau) \leqslant \rho(\tau) \leqslant 2\pi\alpha(\tau). \tag{3'}$$

2. Пусть $\xi(t)$ — стационарный в широком смысле процесс, и

$$\rho(\tau) = \rho(H^{t}_{-\infty}, H^{\infty}_{t+\tau})$$

(показатель $\rho(\tau)$ не зависит от t в силу стационарности).

Если спектральная функция $F(\lambda)$ нашего процесса не абсолютно непрерывна, то $\rho(\tau) = 1$ при любых τ [5], [6].

Пусть $F(\lambda)$ — абсолютно непрерывна, и $f(\lambda)$ есть спектральная плотность процесса $\xi(t)$, $f(\lambda) = F'(\lambda)$.

Теорема 3. *В случае целочисленного времени*

$$\rho(\tau) = \inf_{\varphi} \operatorname{vrai}\sup_{\lambda}\left[\,|f(\lambda) - e^{i\lambda\tau}\varphi(e^{-i\lambda})|\,\frac{1}{f(\lambda)}\right], \tag{4}$$

где $\inf_{\varphi}$ *берется по всем функциям* $\varphi(z)$, *аналитически продолжаемых внутрь единичного круга,*

$$\rho(\tau) = \inf_{\varphi} \operatorname{vrai}\sup_{\lambda}\left[\,|f(\lambda) - e^{i\lambda\tau}\varphi(\lambda)|\,\frac{1}{f(\lambda)}\right], \tag{4'}$$

где $\inf_{\varphi}$ *берется по всем функциям* $\varphi(z)$, *аналитически продолжаемых в нижнюю полуплоскость — в случае непрерывного времени.*

Доказательство этой теоремы основывается на одной общей лемме из функционального анализа.

Лемма. *Пусть* L *— некоторое банаховское пространство,* L^* *— сопряженное к нему. Пусть* H *— некоторое подпространство пространства* L *и* H^0 *— совокупность линейных функционалов, обращающихся на* H *в нуль.*

Для любого $h^* \in L^*$ *имеет место следующее соотношение:*

$$\sup_{h \in H,\ \|h\| \leqslant 1} h^*(h) = \inf_{h^0 \in H^0} \|h^* - h^0\|. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $(h^* - h^0)(h) = h^*(h)$, то при $h \in H$, $\|h\| \leqslant 1$

$h^*(h) \leqslant \| h^* - h^0 \|$, и потому $\sup_{h \in H,\ \|h\|=1} h^*(h) \leqslant \inf_{h^0 \in H^0} \| h^* - h^0 \|$. Далее, по теореме Хана-Банаха о продолжении линейного функционала, существует функционал h_1^*, совпадающий на H с h^*, норма $\| h_1^* \|$ которого не превосходит $\sup_{h \in H,\ \|h\| \leqslant 1} h^*(h)$. Разность $h^* - h_1^* = h_1^0 \in H^0$ и

$$\| h^* - h_1^0 \| = \| h_1^* \| = \sup_{h \in H,\ \|h\|=1} h^*(h),$$

что и доказывает соотношение (5).

Вернемся к нашей теореме. Очевидно, что

$$\rho(\tau) = \sup_{p_1, p_2} \int e^{i\lambda\tau} p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda,$$

где $p_j(\lambda) = \sum_{t_k^j \geqslant 0} c_k^j e^{-i\lambda t_k^j}$, $\int |p_j|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leqslant 1$, $j = 1, 2$, и интегрирование производится в пределах от $-\pi$ до π и в случае целочисленного времени и в пределах от $-\infty$ до ∞ в случае непрерывного времени. Используя некоторые свойства граничных значений аналитических функций, можно показать, что на самом деле

$$\rho(\tau) = \sup_{p} \int e^{i\lambda\tau} p(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda, \tag{6}$$

где

$$p(\lambda) = \sum_{t_k \geqslant 0} c_k e^{-i\lambda t_k}, \quad \int |p(\lambda)|\, f(\lambda)\, d\lambda \leqslant 1.$$

Возьмем в качестве пространства L пространство функций $h(\lambda)$, интегрируемых с весом $f(\lambda)$, $\| h \| = \int |h(\lambda)|\, f(\lambda)\, d\lambda$, в качестве подпространства H — линейное замыкание функций $p(\lambda)$ вида $p(\lambda) = \sum_{t_k \geqslant 0} c_k e^{-i\lambda t_k}$.

Каждый линейный функционал h^* на L имеет вид

$$h^*(h) = \int h^*(\lambda)\, h(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda,$$

причем

$$\| h^* \| = \operatorname{vrai} \sup_{\lambda} |h^*(\lambda)|.$$

Подпространством H^0 будет, очевидно, подпространство линейных функционалов h^0 с соответствующими функциями $h^0(\lambda)$, для которых $\int e^{-i\lambda t} h^0(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda = 0$, при всех $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(e^{-i\lambda}) = h^0(\lambda) f(\lambda)$ может быть аналитически продолжена внутрь единичного круга в случае целочисленного времени, а в случае непрерывного времени $\varphi(\lambda) = h(\lambda) f(\lambda)$ может быть продолжена аналитически в нижнюю полуплоскость.

Взяв в качестве h^* линейный функционал, соответствующий функции $h^*(\lambda) = e^{-i\lambda\tau}$, из соотношения (5) леммы получаем равенства (4) и (4′).

Теорема 4. *Если существует функция $\varphi_0(z)$, аналитическая внутри единичного круга в случае целочисленного времени (в нижней полуплоскости в случае непрерывного времени), имеющая граничное значение $\varphi_c(e^{-i\lambda})$ (соответственно $\varphi_\rho(\lambda)$) такая, что отношение f/φ_0 является равномерно непрерывной функцией от λ, причем $|f/\varphi_0| \geqslant \varepsilon > 0$ для почти всех λ, то при $\tau \to \infty$*

$$\rho(\tau) \to 0. \tag{7}$$

Если существует аналитическая функция $\varphi_0(z)$ такая, что $|f/\varphi_0| \geqslant \varepsilon > 0$ и производная $(f/\varphi_0)^{(k)}$ равномерно ограничена, то

$$\rho(\tau) \leqslant C\tau^{-k}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(z)$ есть полином степени не выше $\left[\frac{\tau}{2}\right]$ в случае целочисленного времени (аналитическая функция экспоненциального типа с показателем не выше $\frac{\tau}{2}$ в случае непрерывного времени).

Имеем,

$$\inf_{\varphi} \operatorname{vrai\,sup}_{\lambda} \left[\left| f - e^{-i\lambda\tau}\varphi \right| \frac{1}{f(\lambda)} \right] \leqslant \inf_{\varphi=\varphi_0\psi} \operatorname{vrai\,sup}_{\lambda} \left[\left| \frac{f}{\varphi_0} - e^{i\lambda\tau}\psi \right| \frac{|\varphi_0|}{f} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \inf_{\psi} \operatorname{vrai\,sup}_{\lambda} \left| \frac{f}{\varphi_0} - e^{i\lambda\tau}\psi \right| \to 0$$

при $\tau \to \infty$, так как отношение f/φ_0 можно равномерно приблизить функциями $\psi(z)$ описанного типа (см. [7], стр. 207, и [8]).

Например, *свойство* (7) *всегда выполняется, если спектральная плотность* $f(\lambda)$ *непрерывна и не обращается в нуль ни при каких* λ, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ (*случай целочисленного времени*), *или если* $f(\lambda)$ *равномерно непрерывна на всей прямой, не обращается в нуль и при достаточно больших* λ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{m}{\lambda^k} \leqslant f(\lambda) \leqslant \frac{M}{\lambda^{k-1}} \tag{9}$$

при некоторых положительных m, M *и целом* $k > 0$ (*случай непрерывного времени*).

Далее, из работ [5], [6] вытекает, что если $\rho(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то спектральная плотность не может «очень сильно» обращаться в нуль; именно, она должна быть положительна почти всюду и

$$\int \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty. \tag{10}$$

Как следует из теоремы 4, более слабое обращение в нуль спектральной плотности $f(\lambda)$, совместимое с (10), само по себе не противоречит свойству сильного перемешивания (эквивалентному (7)). Если $f(\lambda)$ рациональна относительно $e^{i\lambda}$ (при целочисленном t) или относительно λ (при непрерывным t), то показатель $\rho(\tau)$ убывает экспоненциально быстро; например, в случае $f(\lambda) = \frac{c}{a^2+\lambda^2}$, ($\xi(t)$ есть марковский гауссовский процесс), $\rho(\tau) = e^{-a\tau}$.

По-видимому, свойство сильного перемешивания может не выполняться, если спектральная плотность $f(\lambda)$ терпит разрыв (даже если она всюду больше положительной постоянной — в случае целочисленного t).

Авторы выражают благодарность Ю. В. Прохорову за замечания, сделанные им при просмотре рукописи настоящей заметки, несомненно способствовавшие ее улучшению.

Поступила в редакцию
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Rosenblatt, A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., **42**, 1 (1956).
[2] О. В. Сарманов, Максимальный коэффициент корреляции, Докл. АН СССР, **121**, 1 (1958).
[3] О. В. Сарманов и В. К. Захаров, Максимальный коэффициент множественной корреляции, ДАН СССР, **130**, 2 (1960).
[4] В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций, I, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2, (1959), 186—207.
[5] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюл. МГУ, № 6, 1, 141.

[6] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, **46**, 8 (1945).
[7] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, М.— Л., 1947.
[8] С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси, ДАН СССР, IV — 54, 1946; V — 54, 1946.
[9] Г. Крамер, Математические методы статистики, М.— Л., 1949.

ON A STRONG MIXING CONDITION FOR STATIONARY RANDOM GAUSSIAN PROCESSES

A. N. KOLMOGOROV, Yu. A. ROZANOV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

This paper considers conditions, which guarantee strong mixing of stationary random Gaussian process $\xi(t)$.

It is proved, for example, that if the spectral density $f(\lambda)$ of process $\xi(t)$ is continuous and positive (parameter t is discrete) or $f(\lambda)$ is positive and uniformly continuous, and for large λ

$$\frac{m}{\lambda^k} \leqslant f(\lambda) \leqslant \frac{M}{\lambda^{k-1}}$$

(parameter t is continuous), then strong mixing is the case.

ОБ УСЛОВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ *

ЛЯН ЧЖИ-ШУЭН

Пусть (E_1, B_1) и (E_2, B_2) — два измеримых пространства.

Двумерным марковским процессом мы называем необрывающийся марковский процесс $= (z_t, M_t^s, P_{s,z})$ в фазовом пространстве $(E, B) = (E_1 \times E_2, B_1 \times B_2)$ (в смысле Е. Б. ынкина [2]). Положим $z_t = (x_t, y_t)$ $(x_t \in E_1, \ y_t \in E_2)$. Обозначим через $T_{(s,t]}$ $(T_{[s,t]})$ $\leqslant s \leqslant t)$ некоторое счетное и всюду плотное в интервале (s, t) множество вещественных исел, включая t (t и s). Положим $\widetilde{N}_{(s,t]} = \sigma\{x_{t'}, \ t' \in T_{(s,t]}\}$ $\widetilde{N}_{[s,t]} = \sigma\{x_{t'}, \ t' \in T_{[s,t]}\}$**.

Предположим, что

а) B_1, B_2 сепарабельны;

б) для каждого t существует условное распределение величины y_t в широком смысле] относительно любой σ-алгебры измеримых множеств F;

в) $\mathbf{P}_{s,(x,y)}(A)$ для всех $A = \{z_t \in \Delta \times E_2\}$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $\Delta \in B_1$ не зависит от y.

По Дубу [1] условие б) всегда выполнено, если E_2 — Евклидово пространство. В общем случае, из работы М. Иржина [4] вытекает, что б) будет выполнено, если y_t принимает значения в Хаусдорфовом σ-компактном пространстве со счетным базисом, и B_2 состоит из всех борелевских множеств этого пространства. Отметим, что при условии в) $_{,(x,y)}(A)$ тоже не зависит от y для всех $A \in \widetilde{N}^s = \sigma\{x_u, \ u \geqslant s\}$ и если положить

---

* Задача изучения условных марковских процессов была впервые поставлена в работе П. Стратоновича [3].

** Здесь и в дальнейшем мы будем всегда обозначать $\sigma\{-\}$ σ-алгебру, порожденную системой множеств или случайных величин, указанных в скобках.

$\widetilde{N}_t^s = \sigma\{x_u,\ s \leqslant u \leqslant t\}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{s,x}(A) = \mathbf{P}_{s,(x,y)}(A)$ для $A \in \widetilde{N}^s$, то $X = (x_t, \widetilde{N}_t^s, \widetilde{P}_{s,x})$ является марковским процессом.

Теорема. *При предположениях* а) — в) *можно построить функцию* $V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma)$ такую, что

1) *для всех* $t < u$, $\zeta \in E_2$, $\Gamma \in B_2$ $V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma) = \mathbf{P}_{t,x,\zeta}\{y_u \in \Gamma,\ \omega \mid x_\nu,\ \nu \in T_{[t,u]}\}$ (п. н. $\widetilde{N}_{[t,u]}\widetilde{\mathbf{P}}_{t,x}$);

2) *при фиксированных* t, u, ω, ζ, $V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma)$ *является вероятностной мерой на* B_2;

3) *при фиксированных* t, u и $\Gamma \in B_2$ $V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma)$ *измерима относительно* $\widetilde{N}_{[t,u]} \times B_2$ по (ω, ζ);

4) *для* $0 \leqslant s < t < u$ *имеет место функциональное уравнение*

$$V_u^s(\omega, y, \Gamma) = \int_{E_2} V_u^t(\omega, \zeta, \Gamma)\, V_t^s(\omega, y, d\zeta) \quad (\text{п. н. } \widetilde{N}_{[s,u]}, \widetilde{\mathbf{P}}_{s,x}).$$

Замечание. Обычно приходится иметь дело с процессами, для которых σ-алгебра $\widetilde{N}_u^t = \sigma\{x_\nu,\ t \leqslant \nu \leqslant u\}$ для всех $0 \leqslant t \leqslant u$ определяется лишь множеством значений x_ν, $\nu \in T_{[t,u]}$. (Для этого, например, достаточно, чтобы x_t являлся непрерывным справа процессом в топологическом пространстве с счетной базой, причем, σ-алгебра B совпадала бы с системой всех борелевских множеств этого пространства.) В этом случае теорема сохраняет силу при замене всюду $\widetilde{N}_{[t,u]}$ на $\widetilde{N}_u^t$ и т. д.

При доказательстве этой теоремы используется следующая основная лемма:

Лемма. *Пусть* F_{12}, F_1, F_2 — *сепарабельные* σ-*алгебры измеримых множеств в вероятностном пространстве* $(\Omega, M, \mathbf{P})$ *и* $F_{12} = \sigma\{F_1, F_2\}$. *Пусть* $\Sigma = \{\Lambda_j^m\}$ — *система подразделений пространства* Ω, *становящихся все мельче при увеличении* n (*т. е. для каждого* j, $\Lambda_j^{(m)} \cdot \Lambda_k^{(m)} = \phi$ *при* $j \neq k$; $\bigcup_j \Lambda_j^m = \Omega$, Λ_j^m *является для каждого* j *суммой некоторых из* Λ_j^m *при* $m < m'$) *и* $\sigma\{\Lambda_j^m\} = F_2$, *тогда справедливо следующее соотношение*:

$$\mathbf{P}\{A, \omega \mid F_{12}\} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{P}(A\Lambda_{j_m}^{(m)}, \omega \mid F_1)}{\mathbf{P}(\Lambda_{j_m}^{(m)}, \omega \mid F_1)}\, \Lambda_{j_m}^{(m)} \ni \omega \quad (\text{п.н. } F_{12}p)$$

для всех $A \in M$.

Поступила в редакцию
4.2.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Doob, Stochactic processes, New York — London, 1953.
[2] Е. Б. Дынкин, Основание теории марковских процессов, Физматгиз, 1959.
[3] Р. П. Стратонович, Условные процессы Маркова, Теория вероят. и ее примен **V**, 2 (1960), 172—195.
[4] М. Иржина, Условные вероятности на σ-алгебрах со счетным базисом, Чехосл вацкий мат. журнал, **4** (79), (1954).

ON CONDITIONAL MARKOV PROCESSES

C. S. LEUND (MOSCOW)

(Summary)

In this paper a pair of random processes X_t, Y_t, which conjunctly form Markov proce Z_t is considered. The conditional distribution of the process Y_t for the condition of know realization of process X_t during some time interval is examined. E. B. Dynkin has pr posed that if X_t is a Markov process, the conditional distribution of Y_t will satisfy a fun tional equation similar to the known Kolmogorov-Chapman equation. The author has prov this proposition, but details of the proof are omitted here.

ПРИЗНАК ОДНОРОДНОСТИ ПО КООРДИНАТАМ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА МАРКОВА

И. Д. ЧЕРКАСОВ

§ 1. Формулировка задачи

Рассмотрим n-мерное собственно-риманово пространство V_n с метрическим тензором

$$g_{ji}(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n) = g_{ij}(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n). \tag{1}$$

Пусть

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}^1(t),\ \ldots,\ \mathbf{X}^n(t)) \tag{2}$$

есть n-мерная случайная величина со значениями в пространстве V_n.

Положим по обозначению

$$P(t,\ x;\ \tau,\ G) = \mathbf{P}\{\mathbf{X}(\tau) \in G / \mathbf{X}(t) = x\}, \tag{3}$$

где $t < \tau$, а G — некоторая область V_n.

Определение 1. Если

$$P(t,\ x;\ \tau,\ G) = \int\limits_G f(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, dV_\xi, \tag{4}$$

где функция f удовлетворяет соотношениям:

$$f(t,\ x;\ \tau,\ \xi) \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_{V_n} f(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, dV_\xi = P(t,\ x;\ \tau,\ V_n) = 1. \tag{6}$$

$$f(t,\ x;\ \tau,\ \xi) = \int\limits_{V_n} f(t,\ x;\ s,\ y)\, f(s,\ y;\ \tau,\ \xi)\, dV_y, \tag{7}$$

$$\int\limits_{\bar{G}} f(t,\ x;\ \tau,\ \xi)\, dV_\xi \to 0,\ \tau \to t,\ x \bar{\in} G, \tag{8}$$

то будем говорить, что нам задан нормальный марковский процесс $\mathbf{X}(t)$ в пространстве V_n с плотностью вероятностей перехода f. При некоторых довольно широких предположениях относительно функции f (которые мы считаем выполненными) А. Н. Колмогоровым (см. [1]) доказано существование пределов:

$$A^i(s,\ x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{M}\{\mathbf{X}^i(s+\varepsilon) - x^i \mid \mathbf{X}(s) = x\}, \tag{9}$$

$$B^{ij}(s,\ x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{M}\{[\mathbf{X}^i(s+\varepsilon) - x^i][\mathbf{X}^j(s+\varepsilon) - x^j] \mid \mathbf{X}(s) = x\}, \tag{10}$$

В этой же работе для функции f получены два уравнения, первое из которых имеет вид*

---

* Знаки суммирования по два раза встречающимся индексам, как это принято, опускаются.

$$\frac{\partial f(t,\ x;\ s,\ y)}{\partial t} + A^i(t,\ x)\frac{\partial f(t,\ x;\ s,\ y)}{\partial x^i} + B^{ij}(t,\ x)\frac{\partial^2 f(t,\ x;\ s,\ y)}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \qquad (11)$$

Если коэффициенты A^i и B^{ij} удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (11), удовлетворяющего соотношениям (5) — (8) (см. [2] — [5]), то марковский процесс $\mathbf{X}(t)$ однозначно определяется семейством инфинитезимальных операторов

$$A_t = A^i(t,\ x)\frac{\partial}{\partial x^i} + B^{ij}(t,\ x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}. \qquad (12)$$

В §§ 1,2 ограничимся рассмотрением таких процессов, для которых вышеперечисленные условия выполнены.

Определение 2. Если инфинитезимальный оператор A_t процесса $\mathbf{X}(t)$ в некоторой системе координат $x^{i'}$ имеет вид

$$A_t^0 = B^{i'j'}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}, \qquad (13)$$

то $\mathbf{X}(t)$ будем называть однородным по координатам непрерывным марковским процессом.

В дальнейшем считаем, что n-мерное многообразие $\mathfrak{M}_n$, на базе которого построено риманово пространство V_n, имеет порядок $N \geqslant 2$.

Данная заметка имеет целью установление критерия однородности процесса и построение формул перехода от координат x^i к координатам $x^{i'}$, в которых инфинитезимальный оператор этого процесса имел бы вид (13).

Эта задача была поставлена А. Н. Колмогоровым и Е. Б. Дынкиным в личных беседах с автором.

Как за постановку задачи, так и за существенную помощь при оформлении этой работы я выражаю им свою благодарность.

Пользуюсь также случаем выразить свою признательность А. П. Нордену за ценные советы по улучшению данной статьи.

§ 2. Критерий однородности процесса

Введем новую систему координат в V_n:

$$x^i = \psi^i(t,\ x^{1'},\ \ldots,\ x^{n'}), \qquad (14)$$

причем $\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0$. Заметим, что при наших рассмотрениях как метрика пространства V_n, так и вновь введенная система координат $x^{i'}$, изменяются с течением времени t (см. (1) и (14)).

Если одновременно с (14) ввести новые переменные по формулам:

$$\xi^{i'} = \psi^i(\tau,\ \xi^{1'},\ \ldots,\ \xi^{n'}), \qquad (15)$$

то легко убедиться в том, что соотношения (5) — (8) инвариантны, т. е. они будут выполнены и для плотности

$$f'(t, x'; \tau, \xi') = f(t, \psi^1(t, x'), \ldots, \psi^n(t, x'); \tau, \psi^1(\tau, \xi'), \ldots, \psi^n(\tau, \xi') \quad (16)$$

в пространстве V_n, отнесенном к координатной системе $x^{i'}$. Например, вместо (7) будем иметь

$$f'(t, x'; \tau, \xi') = \int_{V_n} f'(t, x'; s, y') f'(s, y'; \tau, \xi') dV_{y'}. \quad (17)$$

При замене системы координат по формулам (14) коэффициенты оператора (12) преобразуются следующим образом:

$$A^{i'} = B^{ij} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial t}, \quad (18)$$

$$B^{i'j'} = B^{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}. \quad (19)$$

Применяя формулу Тейлора, получаем ($x' \in G$)

$$A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + B^{ij} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial t} = \lim_{s \to t} \frac{1}{s - t} \int_G (\xi^{i'} - x^{i'}) f'(t, x'; s, y') dV_{y'}; \quad (20)$$

откуда, применяя (18), делаем вывод об инвариантности соотношения (9). Этот вывод справедлив также в отношении равенства (10).

Инвариантность основных соотношений марковского процесса говорит о том, что если мы сможем преобразовать оператор A_t к простейшему виду A_t^0, то оператору A_t^0 снова будет соответствовать некоторый процесс. А затем мы можем восстановить первоначальный процесс, соответствующий оператору A_t.

Для дальнейшего выберем форму $B_{ij} dx^i dx^j$ в качестве вспомогательной метрической формы в многообразии (матрица $\| B_{ij} \| = \| B^{ij} \|^{-1}$ существует, ибо $B^{ij} \gamma_{ii} \gamma_{ij} > 0$ в соответствии с работой [5]). Обозначим Γ_{jk} символы Кристоффеля 2-го рода, а $R_{ij,kl}$ — ковариантный тензор кривизны пространства V_n, соответствующего новой метрике.

Теорема. *При существовании и непрерывности всех входящих в формулировку теоремы функций необходимым и достаточным условием однородности процесса* $\mathbf{X}(t)$ *является выполнение следующих равенств*:

$$R_{ij,kl} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma^q_{il} + \nabla_i \nabla_l \alpha^q = 0. \quad (22)$$

В (22) ∇_i *означает символ абсолютного дифференцирования в соответствии с новой метрикой, а величины* α^k *определяются равенствами*

$$\alpha^i = \Gamma^i_{jk} B^{jk} + A^i. \quad (23)$$

Доказательство. Из (18) и (19) выводим, что для однородности процесса необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $x^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$B^{ij} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} + A^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

$$B^{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} = B^{i'j'}(t), \quad (25)$$

где $| B^{i'j'}(t) | > 0$.

Система (25) (см., например, [6]) эквивалентна системе уравнений

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j} = \Gamma^i_{jk}(t, x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{26}$$

На основания (24) и (26) имеем

$$\alpha^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial t} = 0. \tag{24*}$$

1. Необходимость. Пусть система (26) + (24*) совместна. Дифференцируя равенство (24*), соответственно по x^j и по t найдем:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial t \partial x^j} = -(\nabla_j \alpha^k)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial t^2} = \left\{\alpha^m(\nabla_m \alpha^i) - \frac{\partial \alpha^i}{\partial t}\right\}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{28}$$

Введем в рассмотрение систему функций

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}(i, j, k = 1, \ldots, n, n+1),$$

положив

$$y^i = x^i, \ (i = 1, \ldots, n), \ y^{n+1} = t, \tag{29}$$

причем

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(i, j, k = 1, \ldots, n); \ \overline{\Gamma}^{n+1}_{jk} = 0 \ (j, k = 1, \ldots, n, n+1);$$

$$\overline{\Gamma}^i_{n+1,k} = \overline{\Gamma}^i_{k,n+1} = -\nabla_k \alpha^i \ (i, k = 1, \ldots, n); \tag{30}$$

$$\overline{\Gamma}^i_{n+1,n+1} = \alpha^m(\nabla_m \alpha^i) - \frac{\partial \alpha^i}{\partial t} \ (i = 1, \ldots, n).$$

При таких обозначениях уравнения (26), (27) и (28) дают систему уравнений

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial y^i \partial y^j} = \overline{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial x^{i'}}{\partial y^k} \ (i, j, k = 1, \ldots, n, n+1). \tag{31}$$

Как известно, для совместности этой системы необходимо и достаточно, чтобы (см. [9], гл. V, § 4)

$$\overline{R}^{\cdot\cdot\cdot l}_{ij,k\cdot} = 0, \tag{32}$$

где

$$\overline{R}^{\cdot\cdot\cdot q}_{lk,i\cdot} = \frac{\partial \overline{\Gamma}^q_{li}}{\partial y^k} + \overline{\Gamma}^q_{kp}\overline{\Gamma}^p_{li} - \frac{\partial \overline{\Gamma}^q_{ki}}{\partial y^l} - \overline{\Gamma}^q_{lp}\overline{\Gamma}^p_{ki}. \tag{33}$$

В (33) индексы l, k, i, q, p пробегают значения от 1 до $n+1$.

Рассмотрим теперь всевозможные случаи для равенства (32).

1) Если $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, то из (32) вытекает равенство (21).

2) При $i = n+1$, $l, k, q = 1, \ldots, n$ после элементарных преобразований равенств (33) получим

$$\nabla_k \nabla_l \alpha^q - \nabla_l \nabla_k \alpha^q = 0. \tag{34}$$

Это есть тождество, ибо альтернированная вторая производная вектора в локально евклидовом пространстве равна нулю.

3) $l = i = n+1$, $k,\ q = 1, \ldots, n$. Имеем:

$$\nabla_k\left\{\alpha^m\,(\nabla_m\alpha^q) - \frac{\partial\alpha^q}{\partial t}\right\} = -\frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla_k\alpha^q) + (\nabla_p\alpha^q)\ (\nabla_k\alpha^p).$$

Преобразовывая это равенство, найдем, что

$$a^m\left\{\nabla_k\nabla_m\alpha^q + \frac{\partial\Gamma^q_{km}}{\partial t}\right\} = 0. \tag{35}$$

4) Пусть $k = n+1$, $i,\ l,\ q = 1, \ldots, n$. Тогда из (33) получаем равенство (22).

Во всех других случаях получаем или тождество (как, например, при $q = n+1$ $i,\ l,\ k = 1, \ldots, n,\ n+1$), или же одно из уже полученных равенств (как, например при $l = n+1$, $k,\ i,\ q = 1, \ldots, n$).

Необходимость равенств (21), (22) доказана.

2. Достаточность. Пусть равенства (21), (22) имеют место. Рассмотрим функции (33). Давая индексам $i,\ j,\ k,\ l$ всевозможные значения от 1 до $n+1$, убеждаемся в том что

$$\overline{R}^{\ldots q}_{lk,i\cdot} = 0. \tag{36}$$

Например, при $i = l = n+1$ и $k,\ q = 1, \ldots, n$ (см. (35))

$$\overline{R}^{\ldots q}_{n+1\,k,\,n+1} = a^m\left\{\ \nabla_k\nabla_m\alpha^q + \frac{\partial\Gamma^q_{km}}{\partial t}\right\} = 0$$

на основании (22), и т. д.

Но при выполнении (36) система (31), т. е. (26) + (27) + (28), дает нам функции $c^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n)$ такие, что выполняется равенство (25) (оно следует из (26)).

Из (27) и (28) вытекает, что

$$A^{i'} = a^i\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial t} = C^{i'}, \tag{37}$$

где $C^{i'}$ — некоторые константы.

Для завершения доказательства достаточности нам потребуется следующая лемма (имеющая, между прочим, и самостоятельный интерес).

Лемма. *Если выполнены условия* (21) *и следующие два*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\Gamma^i_{jk} = 0, \tag{38}$$

$$\nabla_j\alpha^i = \delta^i_j\varphi(t), \tag{39}$$

где $\varphi(t)$ *— некоторая непрерывная функция времени, то рассматриваемый процесс* $\mathbf{X}_1(t)$ *будет однородным.*

Доказательство леммы производится непосредственным вычислением, причем в качестве преобразующих берутся такие функции:

$$x^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n) = \exp\left\{-\int_{t_1}^{t}\varphi(s)\,ds\right\}x_1^{i'}(x^1, \ldots, x^n) +$$

$$+\int_{t_1}^{t}\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}\varphi(u)\,du\right\}\left[x_1^{i'}(x^1, \ldots, x^n)\,\varphi(s) - \alpha^i(s, x)\,\frac{\partial x_1^{i'}(x)}{\partial x^i}\right]ds. \tag{40}$$

где $x_1^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ есть решение системы уравнений (26) при начальных значениях:

$$\left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{x=x_0} = \gamma_i^{i'},\ x^{i'}(t, x_0) = 0,\ (|\gamma_i^{i'}| > 0).$$

На основании этой леммы легко закончить доказательство теоремы.

В системе координат $x^{i'}$ для процесса $\mathbf{X}(t)$ мы имеем:

$$B^{i'j'} = B^{i'j'}(t),\quad A^{i'} = C^{i'}.$$

Очевидно, условия леммы выполнены, причем $\varphi(t) = 0$. Формула (40) дает

$$x^{i''}(t, x^{i'}) = \delta_{i'}^{i''}(x^{i'} - tC^{i'}). \tag{41}$$

Применяя теперь формулы (18) и (19) в системе координат $x^{i''}$, получим

$$A^{i''} = 0,\ B^{i''j''} = B^{i'j'}(t).$$

Теорема доказана. Заметим, что случай $n = 1$ рассмотрен более подробно, чем здесь в заметке [10].

Следствие. *Для того чтобы сператор A_t мог быть преобразован к виду* (13) *с помощью функций $x^{i'}$, не зависящих от времени, необходимо и достаточно условий* (21) (38) *и* $\alpha^i = 0$.

Доказательство. Достаточность вытекает непосредственно из формулы (40), если в ней положить $\alpha^i = 0$ и $\varphi(t) = 0$. Необходимость условий (21) и (38) очевидна. Из (41) на основании того, что $\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| \neq 0$, получаем, что вектор $\alpha = 0$.

Доказанное следствие легко может быть получено из инвариантной формы уравнения Колмогорова (см. [7]). Здесь же оно выведено из общей формулы (40).

§ 3. Однородность одного процесса, применяемого в статистике

Рассмотрим в пространстве Евклида V_n марковский процесс $\mathbf{X}(t)$, инфинитезимальный оператор которого имеет вид (в системе координат x^i):

$$A_t = B^{kl}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} + [A_j^i(t)\,x^j + A_0^i(t)]\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{42}$$

где B^{kl}, A_j^i, A_0^i — непрерывные функции, а матрица $\|B^{ij}\|$ — неособенная на некотором сегменте $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Частные виды оператора (42) применяются в статистике. Например, в своем сообщении [8] (см. также докторскую диссертацию И. И. Гихмана. Процессы Маркова и некоторые задачи математической статистики, 1955 г.) И. И. Гихман говорит о процессах Маркова с производящими операторами такого вида при $n = 1$ и $n = 2$. Оператор (42) характерен тем, что если пространство V_n не компактно, то его коэффициенты не удовлетворяют ни одной из перечисленных теорем существования ([2] — [5]). Однако, если применить метод преобразования координат, то увидим, что оператор (42) может быть приведен к виду (13) с помощью формул преобразования, однозначно обратимых во всем V_n. А отсюда уже будет вытекать существование и единственность марковского процесса с производящим оператором (42), причем мы сможем тогда написать соответствующую плотность вероятностей.

Преобразуем систему координат по формулам (условия теоремы выполнены):

$$x^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n) = X_i^{i'}(t)\, x^i - \int_{t_1}^{t} A_0^k(s)\, X_k^{i'}(s)\, ds, \tag{43}$$

где $X_i^{i'}(t)$ есть фундаментальная система решений системы уравнений

$$[X_i^{i'}(t)]' = -A_i^k(t)\, X_k^{i'}(t) \quad (i, i' = 1, \ldots, n) \tag{44}$$

с начальными данными

$$X_i^{i'}(t_1) = \delta_i^{i'} = \begin{cases} 1, & i' = i, \\ 0, & i' \neq i. \end{cases} \tag{45}$$

Система функций $\{X_i^{i'}(t)\}$ существует и единственна в силу непрерывности $A_j^i(t)$, определена при $t \in [t_1, t_2]$, причем на основании (45) имеем всюду на $[t_1, t_2]$

$$|\, X_i^{i'}(t)\,| > 0. \tag{46}$$

На основании (46) преобразование (43) взаимно-однозначно и обратимо во всем цилиндре $[t_1 \leqslant t < t_2] \times V_n$. Поэтому формулы (18) и (19) с применением (43) дают в итоге

$$A^{i'} = 0, \quad B^{i'j'} = B^{ij} X_i^{i'} X_j^{j'} = B^{i'j'}(t), \tag{47}$$

чем и завершается доказательство однородности процесса, оператор которого имеет вид (42).

Приведем теперь формулу плотности распределения вероятностей перехода, соответствующей оператору (13). Обозначим D' определитель, полученный из матрицы

$$\int_t^\tau \| B^{i'j'}(s) \|\, ds, \tag{48}$$

а $D_{k'l'}$ — алгебраическое дополнение элемента этой матрицы, стоящего в k'-ой строке и l'-ом столбце.

Пусть, наконец, определитель, составленный из координат метрического тензора в системе координат $\xi^{j'}$ обозначается $g'(\tau, \xi')$. Тогда искомая функция равна ($x^{i'}, \xi^{j'} \in (-\infty, \infty)$)

$$f'(t, x'; \tau, \xi') = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{D'(t, \tau)\, g'(\tau, \xi')}} \exp\left\{-\frac{D_{i'j'}}{4D'}(\xi^{i'} - x^{i'})(\xi^{j'} - x^{j'})\right\}. \tag{49}$$

Эта формула в сочетании с (43) позволяет найти единственное условное распределение вероятностей в системе координат x^i, ξ^j марковского процесса, соответствующего оператору (42).

Пример. В качестве примера рассмотрим марковский процесс на плоскости (с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$), оператор которого имеет вид

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{c(t)}\,\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + (2 + c(t))\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{c(t)}}{1-t}\, x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{1-t}\, x\frac{\partial}{\partial x}. \tag{50}$$

Этот оператор взят из [8]. Решая систему (44) в этом случае находим по формулам (43):

$$x' = \frac{1}{1-t}\, x, \quad y' = \frac{1}{1-t}\int_0^t \sqrt{c(s)}\, dsx + y. \tag{51}$$

Найдем координаты тензора диффузии процесса в системе координат (x', y'). Применяя формулы (19), имеем:

$$\left.\begin{aligned} B^{1'1'} &= \frac{1}{2(1-t)^2}, \quad B^{1'2'} = B^{2'1'} = \frac{\sqrt{c(t)}}{2(1-t)} + \\ &+ \frac{1}{2(1-t)^2}\int_0^t \sqrt{c(s)}\,ds, \\ B^{2'2'} &= \frac{1}{1-t}\int_0^t \sqrt{c(s)}\,ds\left[\frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{c(s)}\,ds - \sqrt{c(t)}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

На основании (18) и (51) получим $A^{1'} = A^{2'} = 0$. Метрическая форма и элемент объема пространства V_2 в системе координат (x', y') равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} ds'^2 &= \left[(1-t)^2 + \left(\int_0^t \sqrt{c(s)}\,ds\right)^2\right]dx'^2 - 2\int_0^t \sqrt{c(s)}\,ds\,dx'\,dy' + dy'^2, \\ dV' &= (1-t)\,dx'\,dy'. \end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Теперь для нахождения плотности условного распределения вероятностей марковского процесса, соответствующего оператору (50), следует применить формулу (49) при $n = 2$ и выражения (52) и (53), а затем перейти к системе координат (x, y) по формулам (51).

Замечание. Результаты данной статьи без существенных изменений сохранятся и в том случае, если рассматривать процесс в многообразии $\mathfrak{M}_n$ с заданной в нем скалярной плотностью $F(t, x)$, с помощью которой определяется элемент объема, $dV_x(t) = F(t, x)\,dx^1 \ldots dx^n$.

Поступила в редакцию
12.3.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Zur Theorie zufälle Pazess. Math. Ann. **108** (1933), 149—160.
[2] В. Феллер, К теории стохастических процессов, УМН, вып. V (1938), 57—96.
[3] F. G. Dressel, The fundamental solution of the parabolic equation. Duke Math. Journ., **7** (1940), 186—203.
[4] F. G. Dressel Там же, **13**, 1 (1946).
[5] K. Yosida, On the fundamental solution of the parabolic equation in Riemannian space, Osaka Math. Journ., **5**, 1 (1953).
[6] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ. ГИТТЛ, М., 1953.
[7] A. Kolmogoroff, Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze, Math. Ann. **113**, 1—5 (1937), 766—772.
[8] И. И. Гихман, Об ассимптотических свойствах некоторых статистик. Теория вероят. и ее примен., 1. 3 (1956).
[9] О. Веблен, Инварианты дифференциальных квадратичных форм. ГИИЛ, М., 1948.
[10] И. Д. Черкасов, О преобразовании диффузионного процесса в винеровский, Теория вероят. и ее примен., II, 3 (1957), 384—388.

CRITERIA FOR COORDINATE-HOMOGENEITY FOR CONTINUOUS MARKOV PROCESSES

I. D. CHERKASOV (*MURMANSK*)

(*Summary*)

Let us consider a Markov process with an infinitesimal operator

$$A_t = A^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i} + B^{ij}(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \qquad (*)$$

where $x = (x^1, \ldots, x^n)$ is a point in Riemann space V_n with a metric $g_{ij}(t, x)$.

The necessary and sufficient conditions for the existence of transformation

$$x^{i'} = x^{i'}(t, x^1, \ldots, x^n)$$

which transforms the operator $(*)$ into the well-known operator

$$A_t^0 = B^{i'j'}(t)\frac{\partial^2}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$$

are given.

At the end of the paper an example is given from statistics, in which these conditions are applied for establishing the density of the probabilities $f(t, x, \tau, \xi)$ of a certain Markov process.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТРОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

А. А. ЮШКЕВИЧ

1°. Резюме. Обобщая понятие строго марковского процесса на неоднородный случай, Е. Б. Дынкин предложил в [1] два определения такого процесса, причем им было показано, что эти определения равносильны в случае непрерывности траекторий справа. В настоящей заметке доказывается эквивалентность этих определений в общем случае.

2°. Определения. Повторим все необходимые определения.

Под *марковским процессом* в [1] понимается набор следующих элементов: 1) фазового пространства E с некоторой σ-алгеброй его подмножеств $\mathcal{A}$; 2) пространства элементарных исходов Ω; 3) функции $x(t, \omega)$*, $(0 \leqslant t < \infty,\ \omega \in \Omega)$ со значениями из E; 4) системы вероятностных мер $\mathbf{P}_{s,x}$ $(0 \leqslant s \leqslant \infty,\ x \in E)$ на Ω, удовлетворяющих следующим условиям: а) мера $\mathbf{P}_{s,x}$ задана на σ-алгебре $\mathcal{M}_t^s$, порожденной ω-множествами вида $\{x(t,\omega) \in \Gamma\}$, $(t \geqslant s,\ \Gamma \in \mathcal{A})$; б) $\mathbf{P}_{s,x}\{x(s, \omega) = x\} = 1$; в) переходная функция, определяемая формулой $p(s, x, t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}\{x(t) \in \Gamma\}$ $(s \leqslant t,\ \Gamma \in \mathcal{A})$ $\mathcal{A}$-измерима по x; г) при любых $s \leqslant t \leqslant u,\ x \in E,\ \Gamma \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(u) \in \Gamma\} = \int_A p(t,\ x(t,\ \omega),\ u,\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x},\quad A \in \mathcal{M}_t^s, \qquad (1)$$

где $\mathcal{M}_t^s$ обозначает σ-алгебру, порожденную множествами вида $\{x(u, \omega) \in \Gamma\}$; $s \leqslant u \leqslant t$, $\Gamma \in \mathcal{A}$ (В [1] не требуется, чтобы временной интервал I, на котором протекает процесс, совпадал с полупрямой $0 \leqslant t < \infty$; сделанное нами предположение в действительности не является ограничением и лишь упрощает запись.)

---

* Для краткости, если это не вызывает неудобства, переменная ω в записи $x(t, \omega)$ будет опускаться.

Процесс называется *измеримым*, если при любых $s \leqslant t$ и $\Gamma \in \mathcal{A}$ (u, ω)-множество $\{x(u, \omega) \in \Gamma,\ s \leqslant u \leqslant t\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{B} \times \mathcal{M}_t^s$, где $\mathcal{B}$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств на $[0, \infty)$. (В [1] нет определения измеримого процесса, но подразумевается данное сейчас определение.)

Случайная величина $\tau(\omega)$, заданная на подмножестве Ω_τ пространства Ω, называется не зависящей от будущего и s-прошлого, если всегда $\tau(\omega) \geqslant s$ и $\{\tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{M}_t^s$ при $t \geqslant s$. Через $\mathcal{M}_\tau^s$ обозначается σ-алгебра множеств $A \subset \Omega_\tau$ таких, что $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{M}_t^s$. Легко проверить, что $\mathcal{M}_\tau^s \subset \mathcal{M}^s$ и что $\Omega_\tau \in \mathcal{M}_\tau^s$.

Марковский процесс называется *строго марковским в первом смысле*, если

(I) процесс измерим;

(II) переходная функция $p(s, x, t, \Gamma)$ измерима по совокупности переменных s и x относительно σ-алгебры $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$;

(III) при любых $s < t$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{A}$ и любой не зависящей от будущего и s-прошлого случайной величине τ, определенной на всем Ω и удовлетворяющей условию $\tau \leqslant t$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(t) \in \Gamma\} = \int_A p(\tau,\ x(\tau),\ t,\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x},\quad A \in \mathcal{M}_\tau^s. \tag{2}$$

Марковский процесс называется *строго марковским во втором смысле*, если:

(I) процесс измерим;

(II′) переходная функция $p(s, x, t, \Gamma)$ измерима по совокупности s, x, t относительно σ-алгебры $\mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}$;

(III′) для любых $s \geqslant 0$, случайной величины τ, не зависящей от будущего и s-прошлого, и случайной величины $\eta \geqslant \tau$, заданной на Ω_τ и измеримой относительно $\mathcal{M}_\tau^s$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\eta) \in \Gamma\} = \int_A p(\tau,\ x(\tau),\ \eta,\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x},\quad A \in \mathcal{M}_\tau^s. \tag{3}$$

На первый взгляд может показаться, что данное сейчас определение слабее определения из [1], требующего, чтобы почти всюду в смысле меры $\mathbf{P}_{s,x}$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{x(\eta) \in \Gamma \mid \mathcal{M}_\tau^s\} = p(\tau,\ x(\tau),\ \eta,\ \Gamma). \tag{3a}$$

Ясно, что из (3а) следует (3). Если функция $p(\tau, x(\tau), \eta, \Gamma)$ $\mathcal{M}_\tau^s$-измерима, то верно и обратное. Измеримость $p(\tau, x(\tau), \eta, \Gamma)$ относительно $\mathcal{M}_\tau^s$ следует из предположенной $\mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}$-измеримости $p(s, x, t, \Gamma)$ и $\mathcal{M}_\tau^s$-измеримости величин $\tau(\omega)$ и $\eta(\omega)$, а также $\mathcal{M}_\tau^s$-измеримости $x(\tau(\omega))$, вытекающей из измеримости процесса [2, лемма 5.2]. Аналогичное замечание справедливо и для определения строго марковского процесса в первом смысле.

3. Обсуждение полученного результата. Цель настоящей заметки состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Марковский процесс является строго марковским в первом смысле тогда и только тогда, когда он является строго марковским во втором смысле.*

Очевидно, процесс, строго марковский во втором смысле, является строго марковским и в первом смысле. Обратное утверждение в [1] сформулировано при дополнительном предположении, что E — метрическое пространство и траектории процесса непрерывны справа по t. Доказательство этого результата (при несколько более общих определениях) имеется в монографии Е. Б. Дынкина [2, теорема 5.6].

В [2] доказано также (лемма 5.3), что из измеримости процесса и измеримости переходной функции $p(s, x, t, \Gamma)$ по совокупности s и x вытекает измеримость $p(s, x, t, \Gamma)$ по совокупности s, x и t. Таким образом, для получения теоремы 1 остается доказать, что в предположении измеримости процесса и переходной функции из (III) следует (III′),

ными словами, из свойства строгой марковости для величин $\tau_1 = \text{const}$ вытекает свойство строгой марковости для произвольных величин τ_1. Доказательство опирается на следующую лемму, имеющую, возможно, и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Если марковский процесс измерим, то для любых* $0 \leqslant s \leqslant t$, $\Gamma \in \mathcal{A}$ *и любой случайной величины* $\tau_1(\omega) \geqslant t$, *измеримой относительно* $\mathcal{M}_t^s$ *и заданной на* $\Omega' \in \mathcal{M}_t^s$, *справедливо равенство*

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\tau_1) \in \Gamma\} = \int_A p(t,\ x(t),\ \tau_1,\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x},\quad A \in \mathcal{M}_t^s,\quad A < \Omega' \tag{4}$$

Лемма 1 означает, что в случае измеримого марковского процесса (3) всегда верно для случайных величин τ, постоянных на Ω_τ.

В монографии [2] Е. Б. Дынкин дает более общее определение марковского процесса, чем в [1]. Именно, во-первых, σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$ и $\mathcal{M}^s$ могут быть шире, чем они определены в [1] и в настоящей заметке, во-вторых, процесс может обрываться в случайный момент ζ (при этом σ-алгебра $\mathcal{M}_t^s$ определяется лишь на подмножестве $\Omega_t = \{\zeta > t\}$). Введенные в $n°2$ σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$ и $\mathcal{M}^s$, порожденные множествами вида $\{x(u) \in \Gamma\}$, обозначаются в этом случае, соответственно, $\mathcal{N}_t^s$ и $\mathcal{N}^s$ ($\mathcal{N}_t^s$ определяется лишь на подмножестве Ω_t). Через Ω_τ обозначается в этом случае ω-множество $\{\tau < \zeta\}$, на Ω_τ величина τ и σ-алгебра $\mathcal{M}_\tau^s$ определяются так же, как в $n°2$, только вместо $\{\tau \leqslant t\}$ нужно писать $\{\tau \leqslant t < \zeta\}$ *. В определении измеримого процесса при этом нужно вместо множества $\{x(u, \omega) \in \Gamma,\ s \leqslant u \leqslant t\}$ взять множество $\{x, (u, \omega) \in \Gamma,\ \omega \in \Omega_t,\ s \leqslant u \leqslant t\}$. *Строго марковский процесс* определяется как измеримый процесс с измеримой по s, x переходной функцией $p(s, x, t, \Gamma)$, удовлетворяющий условию (III′).

Теорема 1 и лемма 1 не переносятся целиком на этот более общий случай. Для леммы 1 существенно, чтобы в определении измеримости процесса фигурировали такие σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$, что $\mathbf{P}_{s,x}\{A\}$ при $A \in \mathcal{M}_t^s$ было бы $\mathcal{A}$-измеримой функцией от x и для множеств из $\mathcal{M}_t^s$ выполнялось марковское свойство. Так будет, в частности, если процесс $\mathcal{N}$-*измерим*, т. е. если при любых $s \geqslant 0$, $\Gamma \in \mathcal{A}$ (u, ω)-множество $\{x(u, \omega) \in \Gamma,\ u \geqslant t,\ \omega \in \Omega_u\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{B}\mathcal{N}_t^s$. Именно, справедливы следующие утверждения, аналогичные теореме 1 и лемме 1:

Теорема 1′. *Если измеримый марковский процесс (в смысле* [2]) *с* (s, x)-*измеримой переходной функцией* $p(s, x, t, \Gamma)$ *удовлетворяет какому-либо из условий*:

а) *процесс* $\mathcal{N}$-*измерим*;

б) *при любом* $s \geqslant 0$ *и* $A \in \mathcal{M}^t$ *функция* $\mathbf{P}_{s,x}\{A\}$ *является* $\mathcal{A}$-*измеримой по* x, *и при любых* $0 \leqslant s \leqslant t$, $A \in \mathcal{M}_t^s$, $B \in \mathcal{M}^t$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{AB\} = \int_A \mathbf{P}_{t,x(t,\omega)}\{B\}\, d\mathbf{P}_{s,x},$$

то условие (III) *является необходимым и достаточным для строгой марковости процесса.*

Лемма 1′. *Если измеримый марковский процесс (в смысле* [2] *удовлетворяет какому-либо из условий* а) — б) *теоремы* 1, *то для него справедливо утверждение леммы* 1.

В $n°n°$ 4—6 приводятся доказательства леммы 1 и теоремы 1. Они одновременно являются и доказательствами леммы 1′ и теоремы 1′ для необрывающегося процесса; лишь в случае условия а) нужно всюду в $n°$ 5 вместо $\mathcal{M}^t$ писать $\mathcal{N}^t$. В $n°$ 7 указывается, как перенести эти доказательства на случай обрывающегося процесса.

---

* В [2] случайная величина, не зависящая от будущего и s-прошлого, считается определенной на всем Ω, причем вне Ω_τ имеем $\tau = \max(s, \zeta)$. При изучении строго марковского свойства значения τ вне Ω_τ роли не играет.

4. **Вспомогательная лемма из теории меры.** Нам понадобится одно общее предложение из теории меры. Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями книги Халмоша [3].

Лемма 2. *Пусть* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *— пространство с конечной мерой,* $(Y, \mathcal{Y}, \nu_x)$ *— пространства с ограниченными конечными мерами* ν_x, $(x \in X)$, *причем* $\nu_x(B)$ *при* $B \in \mathcal{Y}$ *является* $\mathcal{X}$*-измеримой функцией* x. *Тогда в пространстве* $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ *можно ввести конечную меру*

$$\nu(C) = \int_X \nu_x(C_x)\, d\mu, \tag{5}$$

где C_x *обозначает сечение множества* C, *определяемое точкой* $x \in X$. *Для любой* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$*-измеримой неотрицательной функции* $f(x, y)$ $(x \in X, y \in Y)$ *выполняется соотношение*

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d\nu = \int_X \left[\int_Y f(x, y)\, d\nu_x \right] d\mu. \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, что $\nu_x(C_x)$-измерима по x на кольце конечных сумм непересекающихся прямоугольников, и множества C, для которых $\nu_x(C_x)$-измерима, образуют монотонный класс. Отсюда следует, что $\nu_x(C_x)$-измерима для всех C из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ так что интеграл в (5) имеет смысл. Счетная аддитивность ν легко получается из счетной аддитивности и неотрицательности ν_x. Формула (6) для случая, когда $f(x, y)$ — характеристическая функция множества из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, сводится к (5). Представляя произвольную неотрицательную измеримую функцию f в виде предела возрастающей последовательности неотрицательных конечных линейных комбинаций характеристических функций, получаем доказательство (6) в общем случае.

5°. **Доказательство леммы 1.** Рассмотрим два экземпляра пространства элементарных исходов Ω, Ω_1 и Ω_2, причем в первом из них в качестве σ-алгебры измеримых множеств возьмем $\mathcal{M}_t^s$, а во втором $\mathcal{M}^t$. На $(\Omega_1, \mathcal{M}_t^s)$ будем считать заданной меру $\mu = \mathbf{P}_{s,x}$, на $(\Omega_2, \mathcal{M}^t)$ — набор мер $\nu_\omega = \mathbf{P}_{t,x(t,\omega)}$. Отобразим Ω естественным образом на диагональ пространства $\Omega_1 \times \Omega_2$: $\boldsymbol{\omega} \to (\omega, \boldsymbol{\omega})$. При этом заданная на $(\Omega, \mathcal{M}^s)$ мера $\mathbf{P}_{s,x}$ индуцирует меру $\overline{\mathbf{P}}$ в пространстве $\Omega_1 \times \Omega_2$ [мера $\overline{\mathbf{P}}(C)$ определяется как мера $\mathbf{P}_{s,x}$ полного прообраза C]. В пространстве $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t)$ определим по лемме 2 меру ν, полагая

$$\nu(C) = \int_{\Omega_1} \nu_\omega(C_\omega)\, d\mu. \tag{7}$$

Лемма 2 применима, потому что $\nu_\omega(B)$ при $B \in \mathcal{M}^t$ есть ни что иное, как $\mathbf{P}_{t,x(t,\omega)}(B)$, функция $\mathbf{P}_{t,x}(B)$ при $B \in \mathcal{M}^t$, как известно, $\mathcal{A}$-измерима по x ([2] лемма 2.2) *, а $x(t, \omega)$ в силу определения марковского процесса $\mathcal{M}_t^s$-измерима по $\boldsymbol{\omega}$; таким образом, $\nu_\omega(B)$ $\mathcal{M}_t^s$-измерима при $B \in \mathcal{M}^t$.

Пусть $A \in \mathcal{M}_t^s$, $B \in \mathcal{M}^t$. Тогда, как известно ([2] теорема 2.1) *

$$\mathbf{P}_{s,x}\{AB\} = \int_A \mathbf{P}_{t,x(t,\omega)}\{B\}\, d\mathbf{P}_{s,x}. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу (7)

$$\nu(A \times B) = \int_{\Omega_1} \chi_A(\boldsymbol{\omega})\, \nu_\omega(B)\, d\mu = \int_A \mathbf{P}_{t,x(t,\omega)}\{B\}\, d\mathbf{P}_{s,x}. \tag{9}$$

* В варианте б) теоремы 1′ это следует из самого предположения б).

Сравнивая (8) и (9), получаем, что $\mathbf{P}_{s,x}\{AB\} = \nu(A \times B)$. Так как прообразом $A \times B$ при отображении $\Omega \to \Omega_1 \times \Omega_1$ является AB, то можем написать $\overline{\mathbf{P}}(A \times B) = \nu(A \times B)$. Поскольку меры $\mathbf{P}$ и ν совпадают на прямоугольниках, то они совпадают и на всех множествах, порожденных прямоугольниками, т. е. на σ-алгебре $\mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t$.

Рассмотрим $(\omega_1 \times \omega_2)$-множество

$$C = \{\omega_1 \in A,\ x(\eta(\omega_1), \omega_2) \in \Gamma\} \quad (A \in \mathcal{M}_t^s,\ A \subset \Omega')$$

и покажем, что оно $\mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t$-измеримо. Пусть D-множество тех пар (u, ω), для которых $x(u, \omega) \in \Gamma$, $u \geqslant t$. В силу измеримости процесса $D \in \mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$, где $\mathcal{B}$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств на прямой. Так как $\eta \geqslant t$, то множество C состоит из тех пар (ω_1, ω_2), для которых $\omega_1 \in A$ и $(\eta(\omega_1), \omega_2) \in D$. При отображении $(\omega_1, \omega_2) \to (\eta_1(\omega_1), \omega_2)$ $(\omega_1 \in A,\ \omega_2 \in \Omega)$ прообраз любого прямоугольника из $\mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$ является $\mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t$-измеримым множеством, так как функция $\eta_1(\omega)$ $\mathcal{M}_t^s$-измерима. Класс множеств из $\mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$, прообразы которых $\mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t$-измеримы, являются σ-алгеброй, потому что при переходе к прообразам сохраняются теоретико-множественные операции. Поскольку эта σ-алгебра содержит все прямоугольники из $\mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$, то она совпадает с $\mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$. Следовательно, $\mathcal{M}_t^s \times \mathcal{M}^t$-измерим прообраз множества D, а это и есть рассматриваемое множество C.

В силу сказанного выше отсюда следует, что

$$\overline{\mathbf{P}}(C) = \nu(C). \tag{10}$$

По определению меры $\overline{\mathbf{P}}$ имеем

$$\overline{\mathbf{P}}(C) = \mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\eta(\omega), \omega) \in \Gamma\}. \tag{11}$$

С другой стороны, согласно (7), определению меры ν_ω и определению переходной функции

$$\nu(C) = \int_{\Omega_1} \nu_\omega(C_\omega)\, d\mu = \int_A \mathbf{P}_{t,x(t,\omega_1)}\{x(\eta_1(\omega_1),\ \omega_2) \in \Gamma\}\, d\mathbf{P}_{s,x}(\omega_1) =$$

$$= \int_A p(t,\ x(t,\ \omega),\ \eta(\omega),\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x}. \tag{12}$$

Из соотношений (10), (11) и (12) немедленно вытекает (4), и лемма 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 1. Нужно проверить, что в случае измеримости процесса и переходной функции (III′) вытекает из (III). Известно [2], что в сумме измеримости процесса и переходной функции левая и правая части в (3) имеют слысл, и нужно доказать только их равенство друг другу. Обе они счетно-аддитивны по A из $\mathcal{M}_\tau^s$. Если $\tau = \eta$ на A, то (3) переходит в очевидное равенство

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\tau) \in \Gamma\} = \int_A \chi_\Gamma(x(\tau))\, d\mathbf{P}_{s,x}, \tag{13}$$

поскольку $p(s, x, s, \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$. Поэтому можно считать, что $\eta > \tau$ на A. Взяв произвольную всюду плотную последовательность $\{t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, легко последовательно построить непересекающиеся множества $A_i \in \mathcal{M}_\tau^s$, дающие в сумме A, такие, что $A_i \subset \{\tau < t_i < \eta\}$. Поэтому достаточно доказать (3) в предположении, что на A можно вставить между τ и η постоянное число t. Наконец, обе части (3) не изменятся, если τ и η заменить, соответственно, τ' и η' (η' определяется только на A), положив $\tau' = \tau$ и $\eta' = \eta$ на A и $\tau' = t$ на $\Omega - A$. Легко проверить, что τ' не зависит от будущего и s-прошлого, что $A \in \mathcal{M}_\tau^s$, η' измеримо относительно $\mathcal{M}_{\tau'}^s$, $\tau' \leqslant t < \eta$, τ' задано на всем Ω. Для краткости вместо τ' и η' будем снова писать τ и η.

Переходим теперь к доказательству (3) для только описанных величин τ и η и множества A. Если $C \in \mathcal{M}_\tau^s$, то $\{C,\ \tau \leqslant u\} \in \mathcal{M}_u^s$ при $u \geqslant s$ в частности, поскольку всюду $\tau \leqslant t$, то $C = \{C_1 \tau \leqslant t\} \in \mathcal{M}_t^s$. Таким образом, $\mathcal{M}_\tau^s \subset \mathcal{M}_t^s$, так что η_1 измерима относительно $\mathcal{M}_t^s$ и $A \in \mathcal{M}_t^s$. Поэтому η_1 и A удовлетворяют условиям леммы 1, так что

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\eta_1) \in \Gamma\} = \int_A p(t,\ x(t,\ \omega),\ \eta_1(\omega),\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x}. \tag{14}$$

К интегралу в (14) мы применим лемму 2. В качестве $(X, \mathcal{X}, \mu)$ возьмем $(\Omega, \mathcal{M}_\tau^s, \mathbf{P}_{s,x})$, в качестве пространств $(Y, \mathcal{Y}, \nu_x)$ — фазовое пространство $(E, \mathcal{A})$ с набором мер $p(\tau, x(\tau), t, \Gamma)$, зависящим через посредство τ и $x(\tau)$ от параметра $\omega \in \Omega$. При каждом Γ из $\mathcal{A}$ $p(\tau, x(\tau), t, \Gamma)$ является $\mathcal{M}_\tau^s$-измеримой функцией ω, так как p есть $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$-измеримая функция двух первых своих аргументов, τ, очевидно, $\mathcal{M}_\tau^s$-измеримо, и $x(\tau)$, как известно [2, лемма 5.2], тоже $\mathcal{M}_\tau^s$-измеримо в случае измеримого процесса. Таким образом, условия леммы 2 выполнены. При этом мера ν из леммы 2 всюду на своей области определения будет совпадать с мерой $\mathbf{P}_{s,x}$, которая естественным образом вводится в $(\Omega \times E, \mathcal{M}_\tau^s \times \mathcal{A})$ посредством отображения $\omega \to (\omega, x(t, \omega))$. В самом деле, для любого прямоугольника $B \times \Gamma$ $(B \in \mathcal{M}_\tau^s,\ \Gamma \in \mathcal{A})$ имеем в силу выбора пространств X и Y из леммы 2 и основного предположения (2)

$$\nu(B \times \Gamma) = \int_B p(\tau,\ x(\tau),\ t,\ \Gamma)\, d\mathbf{P}_{s,x} = \mathbf{P}_{s,x}\{B,\ x(t) \in \Gamma\},$$

так что ν и $\mathbf{P}_{s,x}$ совпадают на прямоугольниках, а стало быть, и на всей σ-алгебре $\mathcal{M}_\tau^s \times \mathcal{A}$, порожденной прямоугольниками. Функция $p(t, y, \eta_1(\omega), \Gamma)$ является $\mathcal{M}_\tau^s \times \mathcal{A}$-измеримой по аргументам ω и y, поэтому интеграл в (14) можно рассматривать, как интеграл от $p(t, y, \eta_1(\omega), \Gamma)$ по мере ν [3, § 39, теорема 3]. Итак,

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\eta_1) \in \Gamma\} = \int_{A \times E} p(t,\ y,\ \eta(\omega),\ \Gamma)\, d\nu. \tag{15}$$

Интеграл в (15) перепишем, используя равенство (6). Поскольку роль ν_x из (6) у нас играет мера $p(\tau(\omega), x(\tau(\omega)), t, \Gamma)$, то будем иметь

$$\mathbf{P}_{s,x}\{A,\ x(\eta) \in \Gamma = \int_A \Big[\int_E p(t,\ y,\ \eta(\omega),\ \Gamma)\, p(\tau(\omega),\ x(\tau(\omega)),\ t,\ dy)\Big] d\mathbf{P}_{s,x}.$$

В последнем выражении интеграл в квадратных скобках можно по формуле Чемпена—Колмогорова свернуть в $p(\tau, x(\tau), \eta, \Gamma)$ и получить (3).

7°. Случай обрывающегося процесса. В настоящем пункте указывается, какие изменения нужно ввести в доказательства леммы 1′ и теоремы 1′, если предполагать процесс обрывающимся. Мы ограничимся здесь схематичным изложением; детали доказательств легко могут быть восстановлены по аналогии со случаем, необрывающегося процесса.

В доказательстве леммы 1′ при варианте а) нужно везде вместо $\mathcal{M}^t$ писать $\mathcal{M}^{-t}$, вместо пространства $(\Omega, \mathcal{M}_t^s)$ рассматривать $(\Omega, \mathcal{M}_t^s)$. При варианте б), кроме замены $(\Omega, \mathcal{M}_t^s)$ на $(\Omega_t, \mathcal{M}_t^s)$, нужно еще доказать $\mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$-измеримость множества $D = \{x(u, \omega) \in \Gamma,\ u \geqslant t\}$.

Для этого представим D в виде

$$D = \{x(u, \omega) \in \Gamma,\quad u \geqslant t,\quad \zeta(\omega) > u\} =$$
$$= \bigcup_i \{x(u, \omega) \in \Gamma,\quad t \leqslant u \leqslant t_i,\quad \zeta(\omega) > t_i\} = \bigcup_i D_i,$$

где $\{t_i\}$ — счетное всюду плотное подмножество интервала $[t, \infty]$. В силу измеримости процесса $D_i \in \mathcal{B} \times \mathcal{M}_{t_i}^t \subset \mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$, и, значит, $D \in \mathcal{B} \times \mathcal{M}^t$.

В доказательстве теоремы 1′ для случая $\tau_1 > \tau$ на A нужно так изменить определе-ие τ' вне A, чтобы τ' не превосходило $\max(s, \xi)$. Далее, в этом случае из $A \in \mathcal{M}_\tau^s$, $\leqslant t$, следует $A\Omega_t \in \mathcal{M}_t^s$, но не $A \in \mathcal{M}_t^s$. Соответственно, интеграл в (14) должен браться о множеству $A\Omega_t$. Пространство $(\Omega, \mathcal{M}_\tau^s)$ нужно заменить на $(\Omega_\tau^\cdot, \mathcal{M}_\tau^s)$. В (15) интегри-ование снова будет по множеству $A \times E$, так как $A\Omega_t$ — прообраз $A \times E$ при отобра-ении $\omega \to (\omega, x(t, \omega))$.

Единственным неправильным моментом при переходе к обрывающимся процессам вляется доказательство (3) для случая $\tau = \eta_1$, так как теперь не обязательно $p(s, x, x) = 1$. Все пары (s, x), как показано в [2] (стр. 41), делятся на два класса: класс K_1 акой, что $p(s, x, s, x) = 1$, и класс K_2 такой, что $p(s, x, s, E) = 0$. Соотношение (3) удет выполняться для $\tau = \eta_1$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}_{s,x}\{(\tau, x(\tau)) \in K_2\} = 0.$$

бозначим стоящее в фигурных скобках ω-множество через M. Очевидно, $M \in \mathcal{M}_\tau^\zeta$. Пусть $\in \mathcal{M}_\tau^s$ и $\tau(\omega) \leqslant t$ при $\omega \in A$. Тогда, используя (III), нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}_{s,x}\{AM, x(t) \in E\} = 0.$$

ными словами, если $\tau \leqslant t$ на AM, то и $\zeta = t$ на AM. Отсюда легко выводится, что, ли $\tau \leqslant \xi$ на M, где $\xi(\omega)$ — принимающая счетное число значений $\xi(\omega)$-измеримая функ-ия на M, то и $\zeta \leqslant \xi$ на M (с точностью до множества вероятности 0). Для любого > 0 только что описанную случайную величину ξ всегда можно выбрать так, чтобы меть $\tau \leqslant \xi \leqslant \tau + \varepsilon$ на M. Значит, почти всюду на M $\zeta \leqslant \tau + \varepsilon$, т. е. $\zeta \leqslant \tau$. Так как, с ругой стороны, $\tau < \zeta$ всюду на M, то $\mathbf{P}_{s,x}(M) = 0$.

Поступила в редакцию
26.3.59

ЛИТЕРАТУРА

] Е. Б. Дынкин, Неоднородные строго марковские процессы, ДАН СССР, 2 (1957), 261—263.
] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, М., 1959.
] П. Халмош, Теория меры, М., 1953.

ON THE DEFINITION OF A STRONG MARKOV PROCESS

A. A. YUSHKEVIČ (MOSCOW)

(*Summary*)

The equivalence of the two definitions for strong Markov processes given in [1] proved.

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. А. РОЗАНОВ

Пусть имеется некоторое пространство Ω с вероятностной мерой $\mathbf{P}(d\omega)$ и семейство алгебр $\mathfrak{M}_s^t$-измеримых множеств, зависящих от параметров s и t таких, что $\mathfrak{M}_{s'}^{t'} \subseteq \mathfrak{M}_s^t$ и $s \leqslant s' \leqslant t' \leqslant t$.

Пусть это семейство обладает свойством «сильного перемешивания»: при $\tau \to \infty$

$$\alpha(\tau) = \sup_t \sup_{A,B} |\mathbf{P}(AB - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0, \tag{1}$$

е sup берется по всем $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^t$ и $B \in \mathfrak{M}_{t+\tau}^\infty$.

Пусть, далее, $H(\Delta)$ — семейство функций на Ω, аддитивно зависящих от полуинтервала $\Delta = [s, t)$, т. е.

$$H(\Delta) = H(\Delta_1) + H(\Delta_2)$$

для почти всех ω, если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, таких, что $H[s, t)$ измеримо относительно $\mathfrak{M}_s^t$.

Рассмотрим

$$\eta(\Delta) = \frac{1}{\sigma(\Delta)}[H(\Delta) - m(\Delta)],$$

где

$$m(\Delta) = \mathbf{M}H(\Delta), \quad \sigma^2(\Delta) = \mathbf{D}H(\Delta)$$

Будем считать, что дисперсии $\sigma^2(\Delta)$ растут «правильным» образом

$$\sigma^2(\Delta) \asymp |\Delta|,$$

т. е.

$$0 < \varliminf_{|\Delta|\to\infty} (\sigma^2(\Delta)/|\Delta|) \leqslant \varlimsup_{|\Delta|\to\infty} (\sigma^2(\Delta)/|\Delta|) < \infty,$$

когда $|\Delta| = t - s \to \infty$

Теорема.* *Пусть*

$$\alpha(\tau) = O[\tau^{-1-\varepsilon}]$$

при некотором $\varepsilon > 0$. *Если существует* $t_0 > 0$, *такое, что для всех* $\Delta_0 = [t_0, t + t_0)$ *имеет место*

$$\mathbf{M}|H(\Delta_0) - m(\Delta_0)|^{2+\delta} \leqslant M_0 < \infty,$$

где $\delta > 2/\varepsilon$, *то*

$$\mathbf{P}\{\eta(\Delta) < x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

при $|\Delta| \to \infty$.

Эта теорема основывается на двух простых леммах, доказательство которых мы опускаем (ср. [3], § 1).

Лемма 1. *Пусть* $\xi_1(\omega)$ *измерима относительно* $\mathfrak{M}_{-\infty}^t$, $\xi_2(\omega)$ *относительно* $\mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty}$, *и*

$$\alpha(\tau) = O[\tau^{-1-\varepsilon}], \quad \mathbf{M}\xi_k = 0, \quad \mathbf{M}|\xi_k|^{2+\delta} \leqslant \mathbf{M}_0, \quad \delta > 2/\varepsilon.$$

Тогда

$$|\mathbf{M}\xi_1\xi_2| < C\tau^{-1-\varepsilon'},$$

где $\varepsilon' > 0$, а C — *некоторая постоянная.*

Лемма 2. *Пусть имеются случайные величины* ξ_k, $k = \overline{1, n}$, *такие, что* $\mathbf{M}|\xi_k|^r \leqslant M$ $r \geqslant 1$.

Тогда

$$\mathbf{M}|\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n|^r \leqslant M_0 n^r.$$

Перейдем к доказательству нашей теоремы, вполне аналогичному доказательств теоремы 1, 2 работы [3].

Не ограничивая общности можно считать $m(\Delta) = 0$.

Разобьем полуинтервал $\Delta = [s, t)$ точками s_k, t_k на $\Delta_k = [s_k, t_k)$ и $\Delta_k' = [t_k, s_{k+1}$ $k = \overline{1, n}$, таким образом, чтобы при $|\Delta| \to \infty$ было:

$$n \asymp \frac{|\Delta|}{\tau + \tau'} \to \infty, \quad \frac{\tau'}{\tau} \to 0, \quad n\alpha(\tau') \to 0,$$

где

$$\tau = |\Delta_k|, \quad \tau' = |\Delta_k'|.$$

* Ср. [1], [2], [3].

Величину $\eta(\Delta)$ можно представить в виде

$$\eta_i(\Delta) = \frac{1}{\sigma(\Delta)}\left[\sum_1^n \mathrm{H}(\Delta_k) + \sum_1^{n-1} \mathrm{H}(\Delta'_k)\right].$$

Из леммы 1 получаем, что

$$|\,\mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta_k)\,\mathrm{H}(\Delta_{k+l})\,| \leqslant C\tau^2(\tau')^{-1-\varepsilon'}l^{-1-\varepsilon'},$$

$$|\,\mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta'_k)\,\mathrm{H}(\Delta'_{k+l})\,| \leqslant C(\tau')^2\tau^{-1-\varepsilon'}l^{-1-\varepsilon'},$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\left|\sum_{k\neq j}\mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta_k)\,\mathrm{H}(\Delta_j)\right| = \frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\left|\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-l}\mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta_k)\,\mathrm{H}(\Delta_{k+l})\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{|\Delta|}n\tau^2(\tau')^{-1-\varepsilon'}\sum_1^\infty l^{-1-\varepsilon'} \leqslant C\tau(\tau')^{-1-\varepsilon'} \to 0,$$

$$\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\left|\sum_{k\neq j}\mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta'_k)\,\mathrm{H}(\Delta'_j)\right| \leqslant C(\tau')\tau^{-1-\varepsilon'} \to 0,$$

ли выбрать $\tau' = |\Delta'_k|$ так, чтобы $\tau(\tau')^{-1-\varepsilon'} \to 0$ при $|\Delta| \to \infty$, что всегда можно делать. Далее,

$$\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\sum_1^{n-1}\mathbf{M}\mathrm{H}^2(\Delta'_k) \leqslant C\frac{\tau'}{\tau} \to 0$$

следовательно,

$$\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\sum_1^n \mathbf{M}\mathrm{H}^2(\Delta_k) \to 0$$

ри $|\Delta| \to \infty$.

Из соотношения $n\alpha(\tau') \to 0$ вытекает (ср. [3] теорема 1.2), что предельное распределение величин $\eta_i(\Delta)$ такое же, как и сумм $\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\sum_1^n \mathrm{H}(\Delta_k)$, причем слагаемые в них можно считать независимыми.

Для сумм же $\frac{1}{\sigma^2(\Delta)}\sum_1^n \mathrm{H}(\Delta_k)$ выполняется условие Ляпунова:

$$\frac{1}{\sigma^{2+\delta}(\Delta)}\sum_1^n \mathbf{M}\,|\,\mathrm{H}(\Delta_k)\,|^{2+\delta} \leqslant C\,|\,\Delta\,|^{-\frac{2+\delta}{2}}n\tau^{2+\delta} \leqslant C\tau^{1+\delta}\,|\,\Delta\,|^{-\delta/2} \to 0,$$

поскольку из леммы 2 вытекает, что $\mathbf{M}\,|\,\mathrm{H}(\Delta_h)\,|^{2+\delta} \leqslant C\tau^{2+\delta}$, и можно взять $\tau \asymp |\Delta|^a$, где $a < \delta/2(1+\delta)$ (легко видеть, что при $\delta > 2/\varepsilon$ такой выбор τ совместим с требованием $n\alpha(\tau') \to 0$).

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
18.11.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Rosenblatt, A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., **42**, 1 (1956), 43—47.

[2] И. А. Ибрагимов, Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов, ДАН СССР, **125**, 4 (1959), 711—714.

[3] В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций. 1, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 186—207.

A CENTRAL LIMIT THEOREM FOR ADDITIVE RANDOM FUNCTIONS

YU. A. ROZANOV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

In this paper the additive random functions H (Δ) of semiinterval $\Delta = [s, t)$, satisfying the strong mixing condition (1), are considered.

Let in the formula (1) the variable $\alpha(\tau) = O[\tau^{-1-\varepsilon}]$, and $\mathbf{M} \mid \mathrm{H}(\Delta_0) - \mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta_0) \mid^{2+\delta} \leqslant M_0$ $\delta > \frac{2}{\varepsilon}$, for all $\Delta_0 = [t_0, t + t_0)$, then on condition (4),

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mathrm{H}(\Delta) - \mathbf{M}\mathrm{H}(\Delta)}{\sqrt{\mathbf{D}\mathrm{H}(\Delta)}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

when $\mid \Delta \mid = t - s \to \infty$.

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ ЗАНЯТОСТИ ПОЛНОДОСТУПНОГО ПУЧКА ЛИНИЙ

Г. П. БАШАРИН

1. Рассмотрим полнодоступный пучок из n линий, на который поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ и предположим, что время занятия линий не зависит от поступающего потока вызовов и имеет экспоненциальное распределение со средним значением 1. Примем, что вызовы, поступившие в момент занятости всех линий пучка, теряются. Известно ([1], гл. 6), что при сделанных предположениях действие полнодоступного пучка линий описывается однородным марковским процессом $N(t)$ с непрерывным временем и состояниями $0, 1, \ldots, n$, а сам процесс вполне определяется [2], [3] заданием матрицы $A = \| a_{\alpha\beta} \|_0^n$, где ([1], § 20)

$$\left.\begin{aligned} &a_{\alpha\alpha} = -\lambda - \alpha,\ a_{\alpha,\,\alpha+1} = \lambda,\ a_{\alpha+1,\,\alpha} = \alpha + 1,\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &a_{nn} = -n,\ a_{\alpha\beta} = 0, \text{ если } \mid \alpha - \beta \mid \geqslant 2,\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Финальные вероятности p_α процесса $N(t)$ определяются формулами Эрланга

$$p_\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}\left[\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}\right]^{-1}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

2. Введем случайный вектор $\xi(t) = \{\xi_0(t), \xi_1(t) \ldots \xi_n(t)\}$, где $\xi_\alpha(t)$ — время пребывания системы в состоянии α в интервале $[0, t]$. Обозначим через $A_{\alpha\alpha}$ главный минор порядка n матрицы $-A$, соответствующий элементу $a_{\alpha\alpha}$, а через $A_{\alpha\beta \mid \alpha\beta}$ — главный минор порядка $n-1$ ($n \geqslant 2$), получающийся вычеркиванием строк и столбцов с номерами α и β. Примем, что $A_{\alpha\alpha \mid \alpha\alpha} \equiv 0$ и обозначим:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta \mid \alpha\beta}}{\sum_{\alpha\ 0}^{n} A_{\alpha\alpha}},$$

$$R_\alpha = \sum_{\beta\ 0}^{n} R_{\alpha\beta} = \sum_{\beta\ 0}^{n} R_{\beta\alpha}, \qquad R = \sum_{\alpha,\ \beta\ 0}^{n} R_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Пусть M_γ — знак математического ожидания при условии, что в момент $t = 0$ система находилась в состоянии γ. Поскольку при $\lambda > 0$ все состояния процесса $N(t)$ являются сообщающимися (условие Б), то из леммы 9 [3] следует, что при $t \to \infty$

$$M_\gamma \xi_\alpha(t) = t\omega_\alpha + O(1), \tag{4}$$

$$M_\gamma \{\xi_\alpha(t) - t\omega_\alpha\}\{\xi_\beta(t) - t\omega_\beta\} = t\omega_{\alpha\beta} + O(1), \tag{5}$$

$$\omega_\alpha = \frac{A_{\alpha\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^{n} A_{\alpha\alpha}},$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha R_\beta + \omega_\beta R_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta R - R_{\alpha\beta}, \tag{6}$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n$$

$$\omega_{\alpha\alpha} = \omega_\alpha (2R_\alpha - \omega_\alpha R). \tag{7}$$

Из условия Б следует, что при любом начальном распределении вероятностей распределение случайного вектора

$$\eta_t = \left\{0, \frac{\xi_1(t) - t\omega_1}{\sqrt{t\omega_{11}}}, \ldots, \frac{\xi_n(t) - t\omega_n}{\sqrt{t\omega_{nn}}}\right\}$$

сходится при $t \to \infty$ к одному и тому же невырожденному нормальному распределению. Обозначим через $F_t^\gamma(x)$ функцию распределения случайной величины $\frac{\xi_\alpha(t) - t\omega_\alpha}{\sqrt{t\omega_{\alpha\alpha}}}$ для произвольного, но фиксированного α ($\alpha = 0, 1, \ldots, n$) при начальном состоянии γ. Тогда из одномерной интегральной предельной теоремы ([3], § 16) следует, что при $t \to \infty$ равномерно относительно x и независимо от γ

$$F_t^\gamma(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{Q_{\gamma\nu}(x)}{t^{\frac{\nu}{2}}} + O\left(t^{-\frac{k+1}{2}}\right), \tag{8}$$

где $Q_{\gamma\nu}(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots k$) — полином от x, коэффициенты которого зависят только от элементов матрицы A.

3. Основной целью настоящей работы является вывод для процесса $N(t)$ явных выражений для $R_{\alpha\beta}$, R_α и R. Полученные результаты позволяют вычислять $\omega_{\alpha\beta}$ и $\omega_{\alpha\alpha}$, после чего становится возможным практическое применение вышеупомянутых предельных теорем. В качестве примера рассмотрим одномерную случайную величину $\frac{1}{t}\xi_n(t)$ — относительное время полной занятости системы в интервале $[0, t]$. Математическое ожидание этой случайной величины при $t \to \infty$ стремится к ω_n, где $\omega_n = p_n$. Здесь p_n (2) является стандартным показателем качества обслуживания и табулировано [4] для значений n от 1 до 270 при различных $\lambda(\lambda \leqslant 200)$.

Если табулировать величину $\sqrt{\omega_{nn}}$ для тех же значений n и λ, то для фиксированного и достаточно большого t можно на основании (8) оценить вероятность отклонения $\frac{1}{t}\xi_n(t)$ от своего среднего значения. Единицей измерения t здесь является среднее время занятия линий. Трудоемкость табулирования $\sqrt{\omega_{nn}}$ сравнима с трудоемкостью табулирования p_n, выполненного при помощи шведской электронной вычислительной машины BESK.

Отметим, что для однородных марковских процессов с непрерывным временем и конечным числом состояний, описывающих при аналогичных предположениях действие более сложных телефонных схем (например, двухкаскадных [5], [6] или схем ступенчатого включения [7]), условие Б также выполняется и, следовательно, имеют место формулы (4) — (7), а также вышеупомянутые предельные теоремы [3]. Однако, поскольку матрица A этих процессов уже не является якобиевой ([8] стр. 360), то явные выражения даже для финальных вероятностей (4), называемых в телефонии вероятностями состояний, удалось получить только для наиболее простых двухкаскадных схем [5], [6]. В большинстве же случаев для вычисления вероятностей состояний приходится использовать численные методы линейной алгебры или получать оценки для этих вероятностей методом статистических испытаний (метод Монте-Карло), причем в последнем случае обычно получают оценку непосредственно для вероятности потерь, которая для сложных телефонных схем является линейной функцией от некоторых из вероятностей состояний [6], [7].

При реализации метода Монте-Карло на специализированных машинах искусственной телефонной нагрузки существует необходимость в тестах, служащих для одновременной проверки действия физического датчика случайных чисел, устройства для получения потока вызовов и времени «жизни» каждого из них (время «жизни» вызова, получившего отказ, равно 0), счетчиков числа поступивших и потерянных вызовов и т. д. Таким тестом может служить моделирование действия полнодоступного пучка из n линий при аналогичных условиях, позволяющее при минимальных затратах машинного времени проверить согласие между эмпирическим и теоретическим распределением отдельных компонент или групп компонент вектора $\{\xi_0(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$. При выборе компонент $\xi_\alpha(t)$, подлежащих контролю, следует руководствоваться соображениями о выявлении наиболее вероятных технических неисправностей, влияющих на моделируемый процесс или его параметры, простоты контроля и экономии машинного времени. Если при фиксированных λ и n вероятность потери p_n мала, то с точки зрения экономии машинного времени целесообразно контролировать компоненту $\xi_\alpha(t)$, вероятность p_α которой максимальна, или необходимо выбрать такие n и λ, чтобы p_n было достаточно большим. В некоторых случаях целесообразно контролировать одновременно две компоненты, например, $\xi_0(t)$ и $\xi_n(t)$, имеющие предельное двумерное нормальное распределение с известными параметрами.

4. Для процесса $N(t)$ матрица $A(1)$ является якобиевой, что позволяет получить явные выражения как для ω_α, так и для $\omega_{\alpha\beta}$. Обозначим через $A(\alpha, \beta)$ при $\beta \geqslant \alpha$ главный минор матрицы $-A$, образованный строками и столбцами с номерами $\alpha, \alpha+1, \ldots, \beta$

$$A(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \lambda+\alpha & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & \lambda+\alpha+1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha-2 & \lambda+\alpha+2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda+\beta-1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \lambda+\beta \end{vmatrix},$$

и примем, что $A(\alpha, \beta) = 1$ при $\beta < \alpha$.

Лемма. *Для якобиевой матрицы — A справедливы следующие соотношения:*

$$A(\alpha, \alpha) = \lambda + \alpha; \qquad A(0, \alpha) = \lambda^{\alpha+1}; \quad A(\alpha+1, n) = \frac{n!}{\alpha!}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant n-1 \tag{9}$$

$$A(0, n) = \det(-A) = 0; \quad A(\alpha, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\beta-\alpha+1} \frac{(\alpha+\nu-1)!}{(\alpha-1)!} \lambda^{\beta-\alpha+1-\nu}, \quad 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n-1 \tag{10}$$

Докажем формулу (10). В детерминанте $A(\alpha, \beta)$ прибавим все столбцы, начиная со второго, к первому. Разлагая преобразованный таким образом детерминант по элементам первого столбца, получим рекуррентное соотношение

$$A(\alpha, \beta) = \alpha A(\alpha + 1, \beta) + \lambda^{\beta-\alpha+1},$$

из которого вытекает формула (10).

Следствие 1.

$$A_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!} n!, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Доказательство следует из формул (9) и соотношения

$$A_{\alpha\alpha} = A(0, \alpha - 1) A(\alpha + 1, n).$$

Следствие 2. При $t \to \infty$

$$M_\gamma \xi_\alpha(t) = t p_\alpha + O(1), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n, \tag{12}$$

где $p_\alpha = \omega_\alpha$ и определяется формулой (2).

Справедливость этого утверждения вытекает из формул (4) и (11).

Следствие 3.

$$A_{\alpha\beta \mid \alpha\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!} \sum_{\nu=0}^{\beta-\alpha-1} (\alpha + \nu)! \lambda^{\beta-\nu-1},$$

$$\beta > \alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Доказательство следует из леммы и соотношения

$$A_{\alpha\beta \mid \alpha\beta} = A(0, \alpha - 1) A(\alpha + 1, \beta - 1) A(\beta + 1, n), \quad \beta > \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant n - 1$$

Следствие 4.

$$R_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta \mid \alpha\beta} \frac{p_0}{n!}. \tag{14}$$

Введем числа Стирлинга второго рода ([9], стр. 260) соотношением $b_2^{n+1} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \geqslant 1)$ и примем, что $b_2^1 = 0$.

Теорема 1.

$$\frac{1}{p_0} R_\alpha = \sum_{s=0}^{\alpha-1} \frac{\lambda^s}{s!(\alpha - s)} + \left[\frac{b_2^{n+1}}{n!} - \frac{b_2^{\alpha+1}}{\alpha!}\right] \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!} +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{s=\alpha+1}^{n-1} \left[\frac{n!}{s!} - \frac{(n - s + \alpha)!}{\alpha!}\right] \frac{\lambda^s}{s - \alpha}. \tag{15}$$

В формуле (15) и в дальнейшем ту сумму, в которой верхний предел суммирования меньше нижнего, следует полагать равной 0. В частности, для $\alpha = n$

$$R_n = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\lambda^s}{s!(n - s)} \left[\sum_{s=0}^{n} \frac{\lambda^s}{s!}\right]^{-1}. \tag{16}$$

Для вывода (15) представим R_α в виде двух слагаемых

$$R_\alpha \frac{n!}{p_0} = R_\alpha^{(1)} + R_\alpha^{(2)}, \text{ где } R_0^{(1)} = R_n^{(2)} = 0 \text{ и}$$

$$R_\alpha^{(1)} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\beta\alpha \mid \beta\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n;$$

$$R_\alpha^{2} = \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} A_{\beta\alpha \mid \beta\alpha}, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для вычисления $R_\alpha^{(1)}$ воспользуемся формулой (13). Меняя порядок суммирования по α и β и замечая, что ([9] стр. 251)

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha-\nu-1} \frac{(\beta+\nu)!}{\beta!} = \nu! \sum_{\beta=0}^{\alpha-\nu-1} \binom{\beta+\nu}{\nu} = \nu! \binom{\alpha}{\nu+1},$$

получим

$$R_\alpha^{(1)} = n! \sum_{s=0}^{\alpha-1} \frac{\lambda^s}{s!\,(\alpha-s)}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

$R_\alpha^{(2)}$ вычисляется аналогично $R_\alpha^{(1)}$ и имеет следующее значение:

$$R_\alpha^{(2)} = n! \left[\frac{b_2^{n+1}}{n!} - \frac{b_2^{\alpha+1}}{\alpha!}\right] \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!} +$$

$$+ \sum_{s=\alpha+1}^{n-1} \left[\frac{n!}{s!} - \frac{(n-s+\alpha)!}{\alpha!}\right] \frac{\lambda^s}{s-\alpha} \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, n-2. \tag{18}$$

В частности, $R_{n-1}^{(2)} = \lambda^{n-1}$. Из (17) и (18) вытекает (15).

Теорема 2.

$$\frac{1}{p_0} R = \frac{b_2^{n+1}}{n!} + \frac{1}{n!} \sum_{s=1}^{n-1} \left\{ \binom{n}{s} b_2^{n+1-s} - \sum_{\alpha=0}^{s-1} \frac{(n-s+\alpha)!}{\alpha!\,(s-\alpha)} \right\} \lambda^s + \frac{b_2^{n+1}}{n!} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\lambda^s}{s!}. \tag{19}$$

Для доказательства нужно воспользоваться соотношением

$$R \frac{n!}{p_0} = \sum_{\alpha=1}^{n} R_\alpha^{(1)} + \sum_{\alpha=0}^{n-1} R_\alpha^{(2)} \quad \text{и формулами (17) и (18).}$$

Формулы (14), (15) и (19) позволяют получить численные значения или оценки для ω (6) и $\omega_{\alpha\alpha}$ (7) ($\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n$; $n \geqslant 2$). Полагая в случае $n = 1$ $A_{01 \mid 01} = 1$, получи

$$\omega_{00} = \omega_{11} = -\omega_{01} = \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^3}. \tag{2}$$

Формулу (20) легко получить непосредственно дифференцированием соответствующ характеристической функции ([3], § 4)

5. К статье прилагаются таблицы вероятностей p_n и средних квадратических откл нений $\sigma_n = \sqrt{\omega_{nn}}$ потерь на полнодоступном пучке из 5, 10, 15, 20, 30 и 40 лини

Таблицы вероятностей и средних квадратических отклонений потерь

λ	p_5	σ_5	λ	p_{10}	σ_{10}	λ	p_{15}	σ_{15}
0.50	0.000.158	0.008.523	2.0	0.000.038	0.003.153	4.0	0.000015	0.001688
0.75	934	21536	3.0	810	15813	5.0	157	5793
1.00	3067	40451	3.5	2298	27804	6.0	892	14730
1.10	4472	49475	3.6	2756	30705	6.5	1798	21616
1.20	6255	59208	3.7	3281	33772	6.7	2320	24872
1.30	8451	69553	3.8	3878	37003	6.9	2955	28420
1.40	11088	80404	3.9	4552	40394	7.0	3319	30302
1.50	14183	91653	4.0	5308	43940	7.2	4149	34283
1.60	17749	103188	4.1	6151	47636	7.4	5128	38545
1.70	21790	114902	4.2	7087	51475	7.6	6271	43078
1.80	26302	126691	4.3	8120	55450	7.8	7591	47866
1.90	31276	138456	4.4	9254	59553	8.0	9101	52892
2.00	36697	150108	4.5	10494	63774	8.2	10813	58134
2.50	69731	204177	5.0	18385	85292	8.4	12738	63569
3.00	110054	247328	6.0	43142	133882	8.7	16042	72023
4.00	199067	297434	7.0	78741	176510	9.0	19868	80753
5.00	284868	311891	8.0	121661	208498	10.0	36497	110534
10.00	563952	245043	9.0	167963	229070	15.0	180316	203675
20.00	764358	143035	10.0	214582	240079	20.0	329997	205743
50.00	902120	61140	15.0	410341	226810	30.0	527244	162032
70.00	929636	44132	30.0	681336	137200	50.0	707957	104259
90.00	945082	34515	90.0	890240	48724	90.0	835488	59547
197.00	974750	15927	197.0	949507	22516	197.00	924271	27566

λ	p_{20}	σ_{20}	λ	p_{30}	σ_{30}	λ	p_{40}	σ_{40}
8.0	0.000159	0.005336	13.5	0.000042	0.002329	20.5	0.000045	0.002229
9.0	617	11095	15.0	221	5668	21.5	112	3620
10.0	1869	20397	16.5	862	11924	22.5	254	5642
10.5	3011	26574	17.5	1855	18251	23.5	531	8464
11.0	4640	33794	18.5	3624	26541	24.5	1036	12254
11.5	6866	42011	19.5	6500	36789	25.5	1891	17151
12.0	9796	51121	20.5	10812	48752	26.5	3249	23241
12.5	13520	60972	21.5	16830	61966	27.5	5281	30527
13.0	18110	71371	22.5	24720	75819	28.5	8162	38912
13.5	23610	82101	23.5	34524	89656	29.5	12049	48202
14.5	37376	103656	24.5	46156	102881	30.5	17062	58122
15.5	54630	123997	25.5	59433	115032	34.5	49015	97739
16.5	74852	141929	26.5	74106	125802	38.5	96243	126409
17.5	97344	156817	27.5	89897	135040	42.5	150340	140962
18.5	121379	168507	28.5	106523	142720	46.5	204703	145463
19.5	146288	177180	29.5	123720	148907	50.5	255977	144277
20.5	171516	183195	30.5	141258	153722	60.5	365010	132095
25.5	290956	187497	34.5	211357	162359	70.5	449028	117917
30.5	388863	173899	42.5	334748	154335	80.5	514356	105399
50.5	615762	117855	50.5	430066	138313	90.5	566214	94891
70.5	721646	86639	70.5	584193	104648	100.5	608240	86121
90.5	782033	68219	90.5	673738	83001	150.5	736568	58471
190.5	895621	32891	190.5	843487	40244	190.5	791399	46416

вычисленные при помощи универсальной цифровой вычислительной машины М-20. В настоящее время Лаборатория систем передачи информации АН СССР проводит работу по вычислению таблиц значений p_n и σ_n в объеме, сравнимом с объемом таблиц значений p_n [4]. После окончания работы таблицы предполагается издать в сборнике «Проблемы передачи информации», издаваемом ЛСПИ АН СССР.

Поступила в редакцию
13.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды матем. ин-та им. Стеклова, 49 (1955).
[2] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, 5 (1938).
[3] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Изд. АН УзССР, Ташкент, 1955.
[4] C. Palm, Table of the Erlang loss formula, Stockholm, 1954.
[5] Г. П. Башарин, Финальные вероятности многомерного марковского процесса, описывающего действие некоторых двухкаскадных телефонных систем с отказами, Теория вероят. и ее примен., **III**, 4 (1958), 452—458.
[6] Г. П. Башарин, О выводе систем уравнений состояния для двухкаскадных телефонных схем с потерями, Электросвязь, 1 (1960), 56—64.
[7] S. Carlsson, A. Elldin, Solving equations of state in telephone traffic theory with digital computers. Ericsson Technics, **14**, 2 (1958), 221—244.
[8] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1954.
[9] И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1948.

THE CONGESTION TIME LIMIT DISTRIBUTION FOR A FULLY AVAILABLE GROUP OF TRUNKS

G. P. BASHARIN (*MOSCOW*)

(*Summary*)

A fully available group of n trunks is considered under the assumption that a Poisson stream of calls with constant intensity λ is serviced. The full availability group is a loss-system. The holding time is independent of the stream of calls and has an exponential distribution with a mean holding time equal to 1.

Let $\xi(t) = \{\xi_0(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ be a random vector, where $\xi_\alpha(t)$ is the life time of the system in its α state ($\alpha = 0, 1, \ldots, n$) during time interval $[0, t]$. The second moments of random vector $\xi(t)$ are determined as rational functions of λ. These results make it possible to apply integral and local limit theorems for practical purposes.

ИНФОРМАЦИЯ О СОВЕЩАНИИ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ ТЕОРЕМАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С 28 сентября по 2 октября 1959 г. в Ужгороде происходил Семинар по предельным теоремам теории вероятностей, организованный Ужгородским государственным университетом. В работе Семинара приняли участие около тридцати математиков из Москвы, Ленинграда, Киева, Ташкента, Вильнюса, Львова, Ужгорода. Это первый опыт совещания с довольно узкой тематикой. Программа была составлена с таким расчетом, чтобы всегда имелось достаточно времени для обсуждения заслушанных докладов и сообщений.

В работе Семинара можно выделить три основных направления:

I. Попытки найти правильные или асимптотически правильные оценки в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин.

II. Исследование вероятностей больших уклонений (в случаях, выходящих за рамки построенной Г. Крамером теории).

III. Предельные теоремы для стационарных последовательностей с ослабевающей зависимостью (включая применение этих теорем к теоретико-числовым проблемам).

На заключительном заседании с большим докладом выступил А. Н. Колмогоров.

Ниже приводятся программа работы Семинара и представленные авторами резюме большинства прочитанных докладов и сообщений *.

Понедельник 28 сентября

Вечернее заседание

1. *Прохоров Ю. В.* Оценки снизу точности приближений неограниченно-делимыми законами. (Содержание опубликовано в журнале. Теория вероят. и ее примен., том V, вып. 1, стр. 103—113).

2. *Мешалкин Л. Д.*, Аппроксимация дискретных распределений неограниченно-делимыми законами (Содержание опубликовано в журнале Теория вероят. и ее примен., том V, вып. 1, стр. 114—124).

3. *Студнев Ю. П.* Некоторые свойства сопровождающих законов.

Вторник 29 сентября

Утреннее заседание

1*. *Сакович Г. Н.*, О многомерных устойчивых распределениях.

2*. *Сираждинов С. Х.*, Об общей локальной предельной теореме для сумм случайных величин.

3. *Рогозин Б. А.*, Точные оценки приближения функций распределения сумм к нормальному распределению. (Содержание опубликовано в журнале Теория вероят. и ее примен., том V, вып. 1, стр. 125—128).

Среда 30 сентября

Утреннее заседание

1. *Боровков А. А.* Предельные теоремы для максимумов сумм решетчатых случайных величин. (Содержание публикуется в этом выпуске).

2*. *Королюк В. С.* Об асимптотике распределений в схеме блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода.

Среда 30 сентября

Вечернее заседание

1*. *Ибрагимов И. А.*, Асимптотические распределения значений некоторых сумм.

2*. *Минеев М. П.*, О некоторых предельных теоремах теории вероятностей, связанных с аналитической теорией чисел (доклад зачитан А. Г. Постниковым).

---

* Звездочкой в программе отмечены выступления, резюме которых приведены ниже.

Четверг 1 октября

Утреннее заседание

1*. *Статулявичус В. А.*, Некоторые новые результаты для сумм слабо зависимых случайных величин.

2*. *Нагаев С. В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений.

3. *Добрушин Р. Л.*, Приложение теорем о больших уклонениях к исследованию асимптотики вероятностей ошибок в теории информации.

Пятница 2 октября

Утреннее заседание

1*. *Линник Ю. В.*, Соображения по теории больших уклонений (доклад зачитан А. Н. Колмогоровым).

2. *Колмогоров А. Н.*, Очередные задачи исследований в области предельных теорем теории вероятностей

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ И СООБЩЕНИЙ, ПРОЧИТАННЫХ НА СОВЕЩАНИИ

О МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Г. Н. САКОВИЧ (*КИЕВ*)

Распределение с характеристической функцией $f(T)$ будем называть устойчивым, если для любых матриц A и B из некоторой группы $\mathfrak{G}$ существует такая матрица C, что, каков бы ни был вектор T,

$$f(AT)\,f(BT) = f(CT).$$

(Здесь C зависит от A, B, f).

В работе найдены все устойчивые распределения; указаны группы, для которых существуют устойчивые распределения, отличные от нормальных и от распределений, изученных Э. Фельдгеймом и Полем Леви [1]. Для полной группы матриц устойчивы только нормальные распределения.

Изучен также случай сдвига в аргументе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Levy, Thèorie de l'addition des variables alèatoires, I^re éd., Paris, Gauthier-Villars, 1937.

ОБ ОБЩЕЙ ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С. Х. СИРАЖДИНОВ (*ТАШКЕНТ*)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ последовательность независимых случайных величин подчиненных некоторым общим условиям и $p_n(x)$ функция плотности случайной величины $[\xi_1 + \ldots + \xi_n]/\sqrt{n}$. Изучается приближение $p_n(x)$ к нормальной плотности в метрике пространства $L_q(-\infty, +\infty)$ при $q \geq 1$. Аналогичная задача, только с $q > 0$ и весом $|x|^p$, где $p > 0$, изучается для случая цепей Маркова с непрерывным временем. В случае независимых слагаемых подобная локальная предельная теорема устанавливается и для решетчато-распределенных величин.

Часть результатов доклада опубликована в заметках [1] — [3].

ЛИТЕРАТУРА

1] С. Х. Сираждинов, Докл. Акад. наук УзбССР, № 2, 1959.
2] С. Х. Сираждинов, Теория вероят. и ее примен., IV, 2 (1959).
3] С. Х. Сираждинов, Успехи матем. наук, XIV, 4 (1959).

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СХЕМЕ БЛУЖДАНИЯ С РЕШЕТЧАТЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА

В. С. КОРОЛЮК (*КИЕВ*)

Излагается алгоритм построения асимптотических разложений для средних значений некоторых функционалов в схеме блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода. Рассматриваются суммы

$$s_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k} \xi_r, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \; s_0 = 0$$

независимых одинаково распределенных случайных величин с решетчатым распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_r = k\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

имеющем максимальный шаг равный единице. Пусть

$$p(\lambda) = \sum_k p_k \lambda^k$$

его производящая функция. Вводится распределение

$$R_n(x) = \mathbf{P}\{a_- < s_k < a_+, \; 0 \leqslant k \leqslant n; \; s_n = x\} \quad (a_- < 0 < a_+)$$

и функционал от функции $f(x)$

$$U^n(f) = \sum_x f(x) R_n(x).$$

Приводится следующий результат. Пусть $f(x)$ непрерывна вместе со своими производными до 12-го порядка включительно и обращается в нуль вместе с производными вне интервала (a_-, a_+). Предположим, что конечны первые пять моментов исходного распределения и

$$\mathbf{M}\xi_r = 0, \quad D\xi_r = 1, \quad \mathbf{M}\xi_r^m = c_m, \quad m = 3, 4, 5.$$

Тогда для функционала $U_n(f)$ имеет место асимптотическое представление

$$U_n(f) = u_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{1}{n} u_2 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

в котором члены разложения определяются следующим образом:

$$U_m = u_m(0, 0) \quad (m = 0, 1, 2),$$

где $U_m(x, t)$ решения дифференциальных уравнений

$$L[u_0] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0;$$

$$L[u_1] = -\frac{c_3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3};$$

$$L[u_2] = -\frac{c_3}{6} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{c_4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

удовлетворяющие следующим условиям: при $0 \leqslant t < 1$.

$$u_0(a_\pm, t) = 0;$$

$$u_1(a_\pm, t) = -\frac{p'_\pm(1)}{p_\pm(1)} \frac{\partial u_0(a_\pm, t)}{\partial x};$$

$$u_2(a_\pm, t) = -\frac{p'_\pm(1)}{p_\pm(1)} \frac{\partial u_1(b_\pm, t)}{\partial x} - \frac{p'_\pm(1) + p''_\pm(1)}{2p_\pm(1)} \frac{\partial^2 u_0(a_\pm, t)}{\partial x^2};$$

при $a_- \leqslant x \leqslant a_+$

$$u_0(x, 1) = f(x),$$

$$u_1(x, 1) = u_2(x, 1) = 0.$$

Здесь функции $p_+(\lambda)$ и $p_-(\lambda)$ аналитические и отличны от нуля соответственно внутри и вне единичного круга, и определяются в разложении производящей функции

$$p(\lambda) = (\lambda - 2 + \lambda^{-1})\, p_+(\lambda)\, p_-(\lambda)$$

формулами

$$\ln p_\pm(\lambda) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\nu|=1} \frac{1}{\nu - \lambda} \ln \left[\frac{p(\nu)}{\nu - 2 + \nu^{-1}} \right] d\nu.$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СУММ

И. А. ИБРАГИМОВ (ЛЕНИНГРАД)

Любое число $t \in [0, 1]$ можно представить в форме

$$t = \frac{\varepsilon_1(t)}{2} + \frac{\varepsilon_2(t)}{2^2} + \ldots, \quad \varepsilon_j(t) = 0, 1,$$

(двоичная дробь) или в форме

$$t = \cfrac{1}{a_1(t) + \cfrac{1}{a_2(t) + \ldots}} = [a_1(t), a_2(t), \ldots], \quad a_j(t) = 1, 2, 3, \ldots$$

(непрерывная дробь).

Определим операции T_1 и T_2 следующим образом:

$$T_1 t = t' = \frac{\varepsilon_2(t)}{2} + \frac{\varepsilon_3(t)}{2^2} + \ldots,$$

$$T_2 t = t' = [a_2(t_1), a_3(t), \ldots].$$

Отыскиваются условия, при которых для определенной на $[0, 1]$ вещественной функции $f(t)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mes} \left\{ t : \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T_1^k t) < z \right\} = \Phi(z), \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left\{ t : \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T_2^k t) < z \right\} = \Phi(z). \tag{2}$$

Здесь $\Phi(z)$ нормальная $(0, 1)$ функция распределения, σ_i — константы, зависящие от $f(t)$ и мера μ определяется соотношением

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dt}{1 + t}.$$

Равенства (1) и (2) будут выполняться, если, например,

а) $f(t) \in L_2[0, 1]$;

в) $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ (соотв. $\int_0^1 f(t)\,\mu(dt) = 0$),

с) $\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^2\,dt \leqslant C \dfrac{1}{\log^{2+\varepsilon}\frac{1}{h}}$.

Указанные результаты уточняют некоторые теоремы М. Каца [1] и Деблина [2]; они могут быть получены как следствие одной теоремы автора [3].

Полностью содержание доклада будет опубликовано в журнале Вестник Ленинградского университета, сер. математ., механ., и астр., 1960 г., вып. 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Kac, Bull. Amer. Math. Soc., **55**, 7 (1949).
[2] W. Doeblin, Compositio Math., 7 (1940), 353—371.
[3] И. А. Ибрагимов, ДАН СССР, **125**, 4, (1959), 711—814.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ ЧИСЕЛ

М. П. МИНЕЕВ *(МОСКВА)*

М. Кац (M. Kac, Ann. of Math., **47**, 1 (1946), 33—49) доказал, что если g натуральное, $g \geqslant 2$, $f(x)$ периодическая, с периодом 1, функция, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, и если для коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$ справедлива оценка $|a_n| < \dfrac{M}{|n|^{\beta}}$, $\beta > \dfrac{1}{2}$, то

1. Существует предел $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{p} \int_0^1 \left(\sum_{x=0}^{p-1} f(g^x \alpha) \right)^2 d\alpha = \sigma^2$ (утверждение почти очевидное);

2. Если $\sigma \neq 0$, то при любом вещественном λ

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{mes}_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \mathrm{M} \left\{ \sum_{x=0}^{p-1} f(g^x\alpha) < \lambda \sqrt{p} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Дается новое доказательство этой теоремы, основанное на изучении диофантова уравнения $m_1 g^{x_1} + \ldots + m_s g^{x_s} = n_1 g^{y_1} + \ldots + n_s g^{y_s}$; $m_1, \ldots, m_s, n_1, \ldots, n_s$, фиксированные натуральные числа, $0 \leqslant x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \leqslant p-1$, $p \to \infty$ и методе моментов А. А. Маркова (А. А. Марков, «Избранные труды», Москва, 1951, стр. 273). Содержание доклада опубликовано (М. П. Минеев, Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы, Изв. АН СССР, сер. матем., 22 (1958), стр. 575—598).

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. А. СТАТУЛЯВИЧУС (ВИЛЬНЮС)

Докладывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *последовательность* m-*зависимых одинаково распределенных случайных величин с конечным абсолютным моментом* $\mathbf{M}|\xi_1|^s$, *где целое* $s \geqslant 3$. *Пусть* $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ *и* $\mathbf{D}S_n \asymp n$. *Тогда для характеристической функции* $f_n(t)$ *случайной величины*

$$\frac{S_n - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$$

в интервале $|t| \leqslant \ln^2 n$ *имеет место разложение*

$$f_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{k=1}^{s-3} P_{nk}(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\right) + O\left(\frac{|t|^s + |t|^{3s}}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right) e^{-\frac{t^2}{2}(1-\varepsilon_n)}.$$

Коэффициенты многочленов $P_{nk}(it)$ *равномерно ограничены по* n, *константа в символе «*O*» зависит от* s *и ограничена по* n, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Из полученного результата следуют точные оценки для скорости сходимости распределений нормированных сумм $\dfrac{S_n - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$ к нормальному закону. Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если кроме того, величины* ξ_i *принимают только целочисленные значения и для любого целого* $q \geqslant 2$,

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}\left(\min_r \mathbf{P}\{\xi_i \not\equiv r \pmod q \mid \mathfrak{M}_1^{i-1} \times \mathfrak{M}_{i+1}^{n}\}\right) \to \infty \quad (n \to \infty),$$

то равномерно по k *выполняется соотношение*

$$\sqrt{\mathbf{D}S_n}\,\mathbf{P}\{S_n = k\} = g(x_{nk}) + \sum_{i=1}^{s-3} n^{-\frac{i}{2}} P_{ni}\left(-\frac{d}{dx}\right) g(x_{nk}) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}}\right).$$

Здесь $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_{nk} = \dfrac{k - \mathbf{M}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$; $\mathfrak{M}_k^l$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$ *обозначает* σ-*алгебру событий, порожденную событиями вида* $\{(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_r}) \in B\}$, *где* $k \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant l$, B — r-*мерное борелевское множество.*

Имеющиеся интегральные теоремы для m-зависимых величин (см. [5] — [8]), неоднородных цепей Маркова (см. [2] — [4]) и, наконец, для сумм слабо зависимых величин (рассмотренных впервые С. Н. Бернштейном [1]; см. также [9], [10], [14]), обычно доказываются путем выбрасывания определенных «кусков» из рассматриваемой суммы и сведением к сумме независимых случайных величин. Но такой способ не позволяет получить оптимальных остаточных членов, ибо в числитель такого члена войдет стандартное отклонение суммы выброшенных кусков, которое стремится к ∞, когда $n \to \infty$.

Для однородной конечной цепи Маркова эти трудности были преодолены С. Х. Сираждиновым [11] при помощи характеристических матриц. На любые множества состояний эти результаты обобщены С. В. Нагаевым [12].

Для неоднородных цепей Маркова точные оценки были получены автором [13] прямыми вероятностными методами, путем оценки логарифмических производных для Me^{itS_n} в малой окрестности нуля. Оказывается, что вышеупомянутые производные можно оценить

для сумм m-зависимых величин и в некоторых других случаях слабо зависимых величин. В эти оценки входит функция

$$\varphi_n(s) = \sup_{l-k \geqslant s} \sup_{B \in \mathfrak{M}_l^n} |\mathbf{P}\{B \mid \mathfrak{M}_1^k\} - P\{B\}|; \quad s > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Sur l'extension du theoreme limite du calcul des probabilites aux sommes de quantite dependates. Math. Ann., **97** (1926), 1—59. (русск. перевод. С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, **10** (1944), 65—144).

[2] Н. А. Сапогов, Предельная теорема Лапласа — Ляпунова для сингулярной цепи Маркова, ДАН СССР, **58**, 9 (1947), 1905—1908.

[3] Ю. В. Линник, К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 1 (1949), 65—94.

[4] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1, 72—89; **I**, 4 (1956), 365—425.

[5] W. Hoeffding and H. Robbins, The central limit theorem for dependent random variables, Duke math. J., **15**, (1948), 773—780.

[6] P. H. Diananda, The central limit theorem for m-dependent variables asymptotical stationary to second order, Proc. Cambridge Philos. Soc., **50**, 2 (1954), 287—292.

[7] P. H. Diananda, The central limit theorem for m-dependent variables, Proc., Cambridge Philos. Soc., **51**, 1 (1955), 92—95.

[8] Steven Orey, A central limit theorem for m-dependent random variables, Duke math. J., **25** (1958), 543—546.

[9] M. Rosenblatt, A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci., USA 42 (1956), 43—47.

[10] И. А. Ибрагимов, Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов, ДАН СССР, **125**, 4 (1959), 711—714.

[11] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Изд. АН УзбССР, 1955.

[12] С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен, **II**, 4 (1957), 389—416.

[13] В. А. Статулявичус, Локальные предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова, Кандидатская диссертация, 1958.

[14] В. А. Волконский и Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для функционалов от стационарных процессов, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 186—207.

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

С. В. НАГАЕВ (ТАШКЕНТ)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $V(x)$, причем $\mathbf{D}\, x_i < \infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{M}\, X_i = 0$ и $\mathbf{D}\, X_i = 1$.

Определим класс D_α, $0 < \alpha \leqslant 1$, функций комплексного переменного следующим образом: $f(z) \in D_\alpha$, если ее можно представить в форме

$$cz^\alpha (1 + \psi(z)) \text{ при } \alpha < 1, \qquad (1)$$

$$cz \ln z (1 + \psi(z)) \text{ при } \alpha = 1,$$

где $\psi(z)$ — ветвь многозначной функции, имеющей точку разветвления в 0, причем $\psi(z)$ аналитична в некотором круге $|z| < A$, из которого удален отрезок $[0, A]$ и $\lim_{z \to 0} \psi(z) = 0$ (для z^α и $\ln z$ выбираются главные ветви).

Пусть s и p — целые неотрицательные числа.

Мы скажем, что функция распределения $F(x)$ принадлежит классу $D_{\alpha\beta}^{sp}$, если

$$\int_0^\infty e^{itx}\,dF(x) = \sum_{k=0}^{s} \beta_k^+ (it)^k + \varphi_\alpha^+(it)(it)^s, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{itx}\,dF(x) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k^- (it)^k + \varphi_\beta^-(-it)(it)^p,$$

где $\varphi_\alpha^+(z) \in D_\alpha$ и $\varphi_\beta^-(z) \in D_\beta$, причем

$$\frac{d^s}{dz^s}[z^{-\alpha}\varphi_\alpha^+(z)] = o(|z|^{-s}) \quad \text{и} \quad \frac{d^p}{dz^p}[z^{-\beta}\varphi_\beta^-(z)] = o(|z|^{-p})$$

$F(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, например, если

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{|x|^{p+\beta+1}} & x < -1, \\ c & |x| \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1-c}{x^{s+\alpha+1}} & x > 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < c < 1$ — некоторая постоянная.

Заметим, что если $F(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, то условие (A) Крамера (см. [1]; оно фигурирует также и в работе Рихтера [2]) заведомо не выполняется, поскольку из него следует аналитичность функции $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}\,dF(x)$ в некоторой полосе $|\operatorname{Re} z| < \delta$.

Теорема 1. *Пусть $V(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}$, $s \geqslant 2$, $p \geqslant 2$, и существует n_0 такое, что функция распределения суммы $X_1 + X_2 + \ldots + X_{n_0}$ абсолютно непрерывна и ее производная ограничена.*

Тогда

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)) + \frac{\operatorname{Im}[c^+(1 - e^{2\pi i\alpha})]\,\Gamma(s+\alpha+1)}{2\pi n^{\frac{s+\alpha-2}{2}} x^{s+\alpha+1}}(1 + o(1)) \tag{4}$$

при $\alpha < 1$,

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)) - \frac{\operatorname{Re} c^+\Gamma(s+2)}{n^{\frac{s-1}{2}} x^{s+2}}(1 + o(1)) \tag{5}$$

при $\alpha = 1$, если $\alpha + s \leqslant \beta + p$ и $x \to \infty$, $x = o(\sqrt{n})$, и

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1 + o(1)) + \frac{\operatorname{Im}[c^-(1 - e^{2\pi i\beta})]\,\Gamma(p+\beta+1)}{2\pi n^{\frac{p+\beta-2}{2}} |x|^{p+\beta+1}}(1 + o(1)) \tag{6}$$

при $\beta < 1$,

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1)) - \frac{\operatorname{Re} c^- \Gamma(p+2)}{n^{\frac{p-1}{2}} |x|^{p+2}} (1 + o(1)) \tag{7}$$

при $\beta = 1$, если $x \to -\infty$, $|x| = o(\sqrt{n})$ и $\beta + p \leqslant \alpha + s$. Здесь $p_n(x)$ — плотность нормированной суммы $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$, c^+ и c^- — постоянные в представлении (1) для $\varphi_\alpha^+(z)$ и $\varphi_\beta^-(z)$.

Аналогичная теорема верна и для решетчатых случайных величин с максимальным шагом h и c

$$V(x) \in D_{\alpha\beta}^{sp}, \quad s > 2, \quad p \geqslant 2.$$

Соответствующие формулы можно получить из (4)—(7), заменив в левой части $p_n(x)$ на

$$\frac{\sqrt{n}}{h} \mathbf{P}\{Z_n = x_{nk}\}, \quad x_{nk} = \frac{an + kh}{\sqrt{n}},$$

а в правой x — на x_{nk}.

СООБРАЖЕНИЯ ПО ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Ю. В. ЛИННИК (ЛЕНИНГРАД)

1. Рассматриваются независимые, одинаково распределенные величины, с дисперсией σ^2, нулевым средним и ограниченной непрерывной плотность $g(x)$. Составляются нормированные суммы

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

2. Будем говорить, что при $1 \leqslant x \leqslant \Psi(n) \to \infty$ имеет место предельная теорема собирательного типа, если:

$$\frac{P(S_n > x)}{\Phi(x, a_1, \ldots, a_m)} \to 1,$$

где $\Phi(x, a_1, \ldots, a_m)$ — функция x и параметров $a_1, \ldots, a_n$, которые могут быть вычислены по заданному числу подходящих линейных функционалов $g(x)$ —например, моментов если они есть.

3. Рассмотрение теорем Крамера — Рихтера — Петрова в условиях Крамера:

$$\mathrm{E}\, e^{ax_i} < \infty$$

оказывает, что собирательные предельные теоремы возможны только при

$$\Psi(n) < n^{1/2-\varepsilon}.$$

огда $a_1, \ldots, a_n$ определяются $m \sim \frac{1}{\varepsilon}$ моментами $g(x)$.

4. Собирательные предельные теоремы возможны для широкого класса случаев при арушении условия Крамера. Если $\varphi(t) = \mathrm{E}\, e^{itx_1}$ продолжима с лучей $t \geqslant 0$ и $t < 0$, отя бы и по-разному в окрестность 0 в виде аналитической функции с конечным числом

изолированных особенностей, то возможны собирательные предельные теоремы. Роль линейных функционалов для определения $a_1, \ldots, a_m$ играют «псевдо-моменты». Собирательные предельные теоремы будут иметь место, например, для всех рациональных плотностей вида

$$\sum A_\alpha e^{-B_\alpha |x-a_\alpha|^{\delta_\alpha}} P_\alpha(x) \quad (p_\alpha(x) \text{ — полиномы}) \text{ и т. п.}$$

5. Если собирательная предельная теорема имеет место для плотности $g(x)$, то она имеет место и для $g(x) + \Delta(x)$, где $\Delta(x)$ удовлетворяет условию Крамера и

$$\int \Delta(x)\, dx = 0,$$

отсюда видно, что можно допускать аналитичность $g(x)$.

6. Для медленно убывающих плотностей можно выделить довольно общие типы, допускающие собирательные предельные теоремы. Например, если $g(x)$ регулярна на всей реальной оси и в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки или регулярна, или имеет разветвление, или логарифмическую особенность, то имеет место собирательная предельная теорема для $\Psi(n) \leqslant n^{1/2-\varepsilon}$. Таковыми будут, например, все алгебраически плотности, регулярные на оси.

7. Для медленно убывающих плотностей

$$\frac{A}{x^\alpha} < g(x) < \frac{B}{x^\alpha}$$

существует возможность довольно полной классификации случаев наличия собирательных предельных теорем при $\Psi(n) \leqslant n^{1/2-\varepsilon}$.

К НЕОБХОДИМОСТИ УСЛОВИЯ Г. КРАМЕРА *

Ю. В. ПРОХОРОВ (МОСКВА)

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}\,\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\,\xi_k = 1$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Будем говорить, что эта последовательность обладает свойством $\mathbf{A}_\gamma$ $(0 < \gamma \leqslant 1/2)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $A > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех n и $A \leqslant x \leqslant \delta n^\gamma$

$$1 - \varepsilon < \frac{\log \mathbf{P}\{|s_n| > x\sqrt{n}\}}{-x^2/2} < 1 + \varepsilon.$$

Можно показать, что для того, чтобы имело место $\mathbf{A}_{1/2}$, необходимо и достаточно условие Крамера:

$$\mathbf{M}\, e^{h|\xi_i|} < \infty$$

при всех достаточно малых $|h|$.

Далее, можно показать, что для того, чтобы выполнялось $\mathbf{A}_\gamma$, необходимо условие

$$\mathbf{M}\, e^{h|\xi|^\lambda} < \infty, \quad \lambda = \frac{2\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}},$$

при всех достаточно малых $|h|$.

Вероятно, что последнее условие является и достаточным.

---

* Выступление при обсуждении доклада Ю. В. Линника.

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧАХ БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУОСИ*

В. М. ЗОЛОТАРЕВ (МОСКВА), В. С. КОРОЛЮК (КИЕВ)

1. Рассматривается одномерная схема блуждания на полуоси с поглощающим экраном в точке x, описываемая последовательностью сумм $s_0 = 0$, $s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ независимых и одинаково распределенных случайных величин ξ_k с функцией распределения $F(t)$. В качестве объекта изучения берутся случайные величины ν_x — номер первого перескока точки x и ζ_x — величина этого перескока. С распределением ν_x тесно связано распределение случайной величины $\tau_{ln} = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} s_k$: $\mathbf{P}\{\tau_{ln} < x\} = \mathbf{P}\{\nu_x > n\}$. Обозначим

$$u_n(x, y) = \mathbf{P}\{\nu_x = n,\ \zeta_x \geqslant y\};\quad u_n(x) = u_n(x, 0).$$

$$U(z, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) z^n = u_0(x, y) + V(z, x, y),\ 0 < z < 1.$$

Детальное исследование выписанных вероятностей в том случае, когда ξ_k принимает конечное число соизмеримых значений, проводилось А. Боровковым [1] методами алгебры и теории функций комплексного переменного.

2. Связанная с производящей функцией вероятностей $u_n(x, y)$ функция V при $x \leqslant 0$ тождественно равна нулю, имеет разрыв первого рода в точке $x = 0$ и удовлетворяет следующему интегральному уравнению при $x > 0$:

$$V(z, x, y) - \int_0^{\infty} V(z, t, y)\, dK_z(x - t) = K_z(x + y) \tag{1}$$

где

$$K_z(x) = z[1 - F(x)].$$

Обозначим L_λ — оператор преобразования Лапласа и $f(\lambda)$ — характеристическую функцию скачков ξ_k. Общая теория интегральных уравнений, к числу которых относится и (1), изложенная М. Г. Крейном в [2], позволяет выписать для функции $w(\lambda, z, y) = L_\lambda U(z, x, y)$ явное выражение в терминах функции $k_z(\lambda) = zf(\lambda)$, при условии, что $1 - k_z(\lambda) \neq 0$ ни при каких $-\infty < \lambda < \infty$, и что

$$\operatorname{ind}(1 - k_z(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg(1 - k_z(\lambda)) = 0.$$

Можно показать, что оба эти требования в условиях нашей задачи оказываются выполненными.

Имеет место следующее представление, тесно связанное с известным тождеством Спитцера:

$$w(\lambda, z, 0) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{G(z, \lambda)}{G(z, 0)}\right],\ \operatorname{Re}\lambda > 0 \tag{2}$$

где

$$\log G(z, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log[1 - zf(t)]}{\lambda + it}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dF^{n*}(x)$$

3. Вероятность $P(x)$ достижения экрана в точке x при неограниченном блуждании определяется из уравнения

---

* Тезисы были представлены в оргкомитет, но доклад не был прочитан.

$$\lambda L_\lambda P(x) = 1 - \lim_{z \to 1-0} \frac{G(z, \lambda)}{G(z, 0)}.$$

4. Функция $\psi(x) = 1 - U(z, x, 0)$ является функцией распределения безгранично делимого закона со спектральной функцией (функцией Леви)

$$M(x) = 0, \quad N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left[F^{n*}(x) - 1\right]$$

5. Вероятность $u_n(x)$ может быть явно выражена через $F(x)$ (с применением операции свертки) с помощью соотношения

$$L_\lambda u_n(x) = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{M} \sum_{k=0}^{n}{}' E_{n-k}\left(-\frac{a_r}{r}\right) E_k\left(\frac{a_r}{r}\, e^{-\lambda \tau_r}\right)$$

(правая часть легко может быть представлена как преобразование Лапласа некоторой функции), в котором $a_r = 1 - F^{n*}(0)$, случайные величины τ_r имеют функцию распределения $a_r^{-1}\left[F^{n*}(x) - F^{n*}(0)\right]$ и

$$E_n(b_k) = \sum_{\Sigma k i_k = n} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{i_k!} \left(\frac{b_k}{k!}\right)^{i_k}.$$

Из-за громоздкости мы этого явного выражения $u_n(x)$ не приводим.

6. При фиксированном x и $n \to \infty$ асимптотическое поведение вероятности $u_n(x)$ существенно зависит от асимптотики a_r. Именно, если $a_r \to c$ при $r \to \infty$ $(0 < c < 1)$, то в предположении конечности $G(1, \lambda)$

$$\mathbf{P}\{\nu_x > n\} = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots \sim \frac{Q(x)}{\Gamma(1-c)}\, n^{-c},$$

где $Q(x)$ определяется из уравнения

$$\lambda L_\lambda Q(x) = G(1, \lambda).$$

7. При фиксированном n и $x \to \infty$ $u_n(x) \sim 1 - F(x)$ для весьма широкого класса исходных распределений $F(x)$. Именно, в случае $1 - F(x) \sim x^{-\alpha} h(x)$; где $\alpha \geqslant 0$ и $\dfrac{h(kx)}{h(x)} \to 1$ при $x \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1]. А. А. Боровков, Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин I. Теор. вероятн. и ее прим., **V**, 2 (1960), 137—171.

[2] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, **13**, 5 (1947), 3 — 120.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Т-05653 Подписано к печати 25/V-1960 г. Тираж 2250 экз. Зак. 3154
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 10,96+2 вклейка Бум. л. 4 Уч.-изд. л. 11,1

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 11 р. 25 к.

К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Издательство Академии наук СССР ежегодно выпускает более 800 книг по общественным, физико-математическим, химическим, геолого-географическим, биологическим наукам, технике, промышленности, транспорту и вопросам сельского хозяйства.

В целях лучшего обслуживания читателей научной литературой контора «Академкнига» расширяет отдел «Книга — почтой».

Через отдел «Книга — почтой» можно предварительно заказать и по выходе из печати получить наложенным платежом или по перечислению всю литературу, выпускаемую Издательством Академии наук СССР.

По первому требованию отдел бесплатно высылает проспекты, каталоги и другой информационный материал о книгах, готовящихся к печати и имеющихся в наличии.

Для регулярного получения информации контора «Академкнига» просит читателей журнала письменно сообщить отделу «Книга — почтой» следующие сведения: фамилия, имя, отчество; специальность; домашний или служебный адрес; по каким из перечисленных выше разделов науки Вы хотели бы получать информацию.

АДРЕС ОТДЕЛА «КНИГА — ПОЧТОЙ» КОНТОРЫ «АКАДЕМКНИГА»
МОСКВА, ЦЕНТР, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕР., 2/10

«Академкнига»